Math. P.
270m

Math. P.
270m

Ladomus

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36604019310010

<36604019310010

Bayer. Staatsbibliothek

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Non multa sed multum.

Geometrische
Constructionslehre
für
Lehrer und Lernende.

Ein
Versuch geometrischer Geistesgymnastik

von

J. F. Ladomus.

Dritter Theil.

Mit 13 Steintafeln.

Karlsruhe, 1832.
Druck und Verlag von Christian Theodor Groos.

140. C

Tulla's
Annäherungsconstructionen.

Ein für die Raumtechnik
höchst wichtiger Unterrichtszweig.

Bearbeitet
von

J. F. Cadomus.

Nebst einem Anhang
enthaltend:

Tulla's Methode
der graphischen Centrirung der Winkel
und
der Correction der Seiten und Winkel der Dreiecke
bei geodätischen Vermessungen
ausgearbeitet von

J. Zipfel,
Obergeometer bei der Großherzogl. Bad. Oberdirection des Wasser- und Straßenbaues.

Mit 13 Steintafeln.

Karlsruhe, 1832.
Druck und Verlag von Christian Theodor Groos.

Des Freundes Hülle schwand, des Mundes Töne
Sein Geist jedoch wirkt ewig, ja er lebt
Auch uns, er ist's, der lehrend uns umschwebt
Unsterblich sey das Wahre, Gute, Schöne.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.
Bayerische Staatsbibliothek München

Dem Andenken

seines

unvergeßlichen Lehrers und während zwanzig Jahren gewesenen Chefs,

des verstorbenen

Obristen Tulla,

Großherzoglich Badischen Wasser- und Straßenbau-Directors,

widmet diese Blätter

der Verfasser.

Vorrede.

Schon im grauen Alterthum kannte man zwei Gattungen von geometrischen Aufgaben; nämlich eine, die man mittelst der geraden Linie und des Kreises construiren konnte, und eine andere, deren Auflösung auch die Kenntniß der Lehre von den Kegelschnitten und sonstiger Curven erheischte. — Diese Eintheilung könnte man die theoretische nennen und die Auflösungen durch die Namen Elementarconstructionen und höhere oder Curvenconstructionen unterscheiden, weil es wirklich nicht möglich ist, Aufgaben, welche analytisch behandelt auf Gleichungen vom dritten oder höhern Grade führen, durch den bloßen Gebrauch der geraden Linie und des Kreises, also durch bloße Elementargeometrie zu construiren, was auch die Erfahrung bestätigt, da ja der Scharfsinn weder der Alten noch der Neuern die bekannten Probleme der Verdopplung des Würfels und der Dreitheilung des Winkels dadurch allein zu lösen vermochte, sondern zum Mitgebrauch der Kegelschnitte oder anderer krummen Linien höherer Ordnung, also zur Curvenlehre, oder der sogenannten höhern Geometrie ihre Zuflucht nehmen mußten. *)

---

*) Die von A. W. Wlochatius 1804 herausgekommene Schrift: Elementargeometrische Auflösung des Delischen Pro-

Die gemischte, d. h. die zum Theil geometrische, und zum Theil algebraische Auflösungsmethode geometrischer Aufgaben und die sogenannte Construction höherer Gleichungen lieferte eine weit spätere Zeit. — Mit der Einführung des algebraischen Elements in die Auflösung participirte diese auch an dem Charakter der Algebra und gewann mehr Allgemeinheit und Gleichartigkeit der Behandlung. — Das Sinnreiche der Methode, Gleichungen vom dritten und vierten Grade zu construiren, besteht, kurz angedeutet, in Folgendem: die aus den Forderungen der Aufgabe gebildete Gleichung betrachtete man als Resultat der Elimination einer der unbekannten aus zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Größen. Die eine dieser Gleichungen nahm man, dem Grad der Aufgabe entsprechend, jedoch willkührlich an, und folgerte die andere aus der algebraischen Verbindung der willkührlich angenommenen mit der durch die Aufgabe selbst bestimmten. Nun sah man die eine der Unbekannten in der angenommenen und in der gefolgerten Gleichung als Ordinate und die andere Unbekannte als Abscisse an, und construirte dieser Annahme gemäß beide Curven. Die Durchschnitte derselben gehören gemeinschaftlichen Ordinaten an, und die correspondirenden Abscissen liefern nun aus leicht einzusehenden Gründen die Wurzeln der durch die Aufgabe gegebenen

---

blems, der Aufgabe vom Dreischnitt des Winkels und einiger anderen Sätze &c. fand in Uhlhorns Werk: Entdeckungen in der höhern Geometrie Oldenburg 1809, ihren Gegner, so wie ähnliche frühere Schriften die ihrigen.

Gleichung. — Man ging noch weiter und behandelte die ganze Geometrie, als System, analytisch, so daß die im Geist der Alten durch geometrische Anschauung gefundenen Lehren und Folgerungen hier als Resultat algebraischer Operationen aus symbolischen Zeichen gleichsam ablesbar werden. — Doch hatte diese Behandlungsweise wegen der Statt findenden wechselseitigen Beziehungen, zwischen Analysis und Geometrie, auch ihre günstige Rückwirkung auf die geometrische Construction, wie es in der neuern Zeit unter Andern Plückers*) und Möbius Werke glänzend darthun.

So lange wir es nach Aristoteles Sprachgebrauch mit nichtsinnlichen Punkten und Linien zu thun haben, d. h. so lange wir im Gebiet der reinen Geometrie uns befinden, so lange haben auch alle diese verschiedenen Auflösungsmethoden ganz gleichen Werth für das Resultat; so bald wir aber zu Erreichung technischer Zwecke sinnliche Gegenstände bilden, folglich Linienzeichen gebrauchen müssen, d. h. sobald wir Punkte und Linien nicht mehr rein geometrisch, sondern in ihrer Anwendung auf Künste betrachten; dann findet ein bedeutender Unterschied des Werthes statt zwischen Elementarconstructionen und höhern Constructionen. — Diesen näher zu beleuchten ist in einer Zeit, wie die gegenwärtige, in welcher Industrie und Raumtechnik so rasche Fort-

*) S. Analytisch geometrische Entwicklungen von Dr. Julius Plücker, Professor in Bonn; ferner den barycentrischen Calcul von August Ferdinand Möbius, Professor der Astronomie in Leipzig.

schritte machen und ähnliche in den betreffenden Unterrichtszweigen nothwendig zur Folge haben müssen, doppelt wichtig.

Flüsse und Gebirgsketten, welche Länder scheiden, Gräben, Furchen, Gehäge, die Besitzungen, Gebäulichkeiten und verschiedenartiges Gelände trennen, haben als Grenzen zwar den gleichen Character, wie die Linienzeichen des Gärtners, des Maurers, Tischlers, Zimmermanns, des Zeichners, des Kupferstechers, des Geometers 2c., sind aber doch unendlich verschieden an Stoff und Ausdehnung, welche Ungleichheit einzig und allein vom Grad der Genauigkeit bedingt ist, den der technische Zweck fordert, der bald mehr, bald weniger Annäherung an mathematische Punkte und Linien verlangt.

Fordert das technische Bedürfniß, z. B. die Verzeichnung von Punkten, welche die Lage und Größe von Linien und Ebenen bestimmen, nur einiger Maßen genau, so sind in dieser Hinsicht die Leistungen der Elementarconstructionen denen durch Kurven weit vorzuziehen, indem sich mitteltst des Lineals und des Zirkels gerade Linien und Kreise weit sicherer zeichnen lassen, als krumme Linien, entweder durch stätige Verbindung rein geometrisch bestimmter einzelner Punkte, oder durch scharfsinnig erdachte Vorrichtungen und Instrumente in einem Zuge, was Jeder, der mit derartigen graphischen Arbeiten vertraut ist, zugeben muß.— Liegen nun die Punkte, auf deren genaue Bestimmung es ankommt, im Durchschnitt von geraden Linien und Kreisen, so ist natürlich der Grad der Genauigkeit in diesem Falle größer, als wenn die besagten Punkte im Durch-

schnitt von geraden Linien und Curven, Kreisen und Curven oder von Curven allein liegen, weil die erwähnte größere Unsicherheit bei der Verzeichnung der Curven auch eine größere Unsicherheit in der Lage der Durchschnittspunkte zur Folge hat.

Mit den Fortschritten der Raumtechnik, namentlich in Fertigung mathematischer und astronomischer Instrumente, stiegen die Forderungen an die ausübenden Künstler noch höher und so geschah es, daß die englischen Mechaniker Graham und Bird ihre bekannten, in damaliger Zeit bewunderten, Kreiseintheilungen ohne Anwendung des Lineals durch bloße Zirkel ausführten, weil ihnen das Ziehen großer geraden Linien doppelt unsicher schien, einmal wegen möglicherweise mangelhafter Fertigung langer Lineale und dann wegen der möglichen Fehler bei ihrem Gebrauche selbst. — Während so in England der sinnige Künstler seinem Kunstprodukte den höchsten Grad von Genauigkeit zu geben strebte, mit eiserner Geduld versuchsweise verfahrend, und deßhalb Zeit und Stoff opfernd, ersann in Italien Mascheroni's forschender Geist durch seine Zirkelgeometrie die Mittel, der erwähnten Forderung, bei Kreiseintheilungen blos Zirkel zu gebrauchen, wissenschaftlich sicher zu genügen und lieferte so dem Techniker Regeln, durch welche er mit wissenschaftlicher Genauigkeit, in kürzerer Zeit und mit geringerem Aufwand sein Ziel erreichen kann. —

Da Mascheroni der Methode, mit alleiniger Hilfe des Zirkels die Lage von Punkten zu bestimmen, wozu

früher der Mitgebrauch des Lineals nöthig war und worin das Wesen seiner Zirkelgeometrie besteht, aus rein theoretischem Streben nachforschte und zwar früher, als er von Grahams und Birds erwähnten Bemühungen Kunde hatte und diese Kunde ihn nur ermuthigte, um so mehr rastlos sein Ziel zu verfolgen, als er dadurch von dessen Nützlichkeit in der Anwendung schon zum Voraus versichert war, so ist dieses Zusammentreffen abermals ein erfreulicher factischer Beweis der theoretisch begründeten Wechselwirkung zwischen Theorie und Praxis, und muß Techniker und Theoretiker gleich angenehm überraschen und zum freien Weiterschreiten kräftigst aneifern; denn des Theoretikers Forschungen finden früher oder später ihre Anwendung auf Künste, Gewerbe und Industrie, so wie des ausübenden Technikers mühevolles Bestreben, durch praktische Kunstgriffe in seinen Produkten den möglichst höchsten Grad der Vollkommenheit zu erreichen, früher oder später von Theoretikern wissenschaftlich sichre, Zeit und Kosten ersparende Mittel und Regeln zur Ausführung erhält.

Außer der erwähnten Künstlerart gibt es aber noch eine große Anzahl anderer Techniker, deren Constructionen nicht den gleichen Grad von Genauigkeit fordern, welcher von den Verfertigern astronomischer Meßwerkzeuge verlangt werden muß und bei welcher die mathematische Bildung im Allgemeinen auch nicht auf der Stufe steht, um die oft sehr versteckt liegenden Auflösungsmittel aufzufinden. Derartige Techniker müssen daher, theils aus er-

wähntem Grunde versuchsweise verfahren, theils auch weil die Auffindung genauer Methoden oft mehr Zeit erfordert, als der Praktiker gerade bei vorkommendem Falle darauf verwenden kann, wenn er auch die Kenntnisse besitzt.

Dieser Klasse muß demnach auf eine ähnliche, ihr versuchsweises Verfahren regelnde, Art geholfen werden, wie es in arithmetischer Hinsicht die Methode vom falschen Satze thut, und wie die wiederholte Anwendung desselben jeden der Ausübung genügenden Grad von Genauigkeit zu liefern vermag, eben so muß auch in geometrischer Hinsicht der Grad der Genauigkeit von des Künstlers graphischer Ausführung abhängig gemacht werden.

Wegen der unendlichen Verschiedenheit der Aufgaben kann aber die Hilfe hier nicht wie in obigem Falle, in der Angabe von Constructionsmitteln zu einer Klasse von Aufgaben (Kreiseintheilungen) bestehen, sondern muß aus einer sachgemäßen, Kräfte entwickelnden Bildung durch Anleitung und Einübung geschöpft werden, wodurch die Techniker in vorkommenden Fällen sich selbst helfen lernen.

Zu dem Ende müssen wir die geometrischen Constructionen vom technisch-instructiven Gesichtspunkt aus classificiren. —

Obgleich keine technisch ausgeführte Construction im Stande ist, die Schärfe der mathematisch gedachten zu erreichen, sondern nur sich ihr mehr oder weniger annähern kann, so wollen wir doch, in Erwägung, daß Constructionen mit Zirkel und Lineal nach Euclid und Construc-

tionen mit alleiniger Hilfe des Zirkels nach Mascheroni, allseitig richtig ausgeführt, die für die Praxis hinreichende Genauigkeit liefern, die oben erwähnten Constructionen, geometrische reine Constructionen und die nicht nach Euclid's oder Mascheroni's Methode aufgelösten, geometrische Annäherungs-Constructionen nennen.

Wir haben es also mit Letztern zu thun und nach eben angedeutetem Zweck sollen ihre Auflösungen keine andere Kenntnisse als die der Elementargeometrie voraussetzen, und für die Kurven, deren sie bedürfen, die Constructionsmethode jedesmal sich selbst liefern. Letztere Bestimmung hinzuzufügen ist deßhalb nöthig, weil manchmal auch Aufgaben, zu deren Lösung nicht blos die gerade Linie und der Kreis, sondern auch andere krumme Linien gebraucht werden, von denjenigen, blos mit Hülfe des Zirkels und des Lineals, also rein geometrisch construirt werden können, welche mit den Eigenschaften der gewählten Curve bekannt, und wegen dieser Kenntniß, die Curve ihrer ganzen Ausdehnung nach zu zeichnen, überhoben sind. Um diesen wichtigen Unterschied ganz deutlich zu machen, diene die Aufgabe: aus der gegebenen Grundlinie, Höhe und der Summe der zwei andern Seiten ein Dreieck zu zeichnen. Wer die Eigenschaften der Ellipse kennt, wird die Aufgabe leicht in folgende umwandeln: man soll in einer Ellipse, wovon man die große Axe und die Excentricität kennt, die Lage derjenigen Punkte finden, deren Entfernung von der großen Axe (Ordinate) bekannt ist.

Nachdem er nun die halbe kleine Axe auf bekannte Weise bestimmt hat, wird er in der leicht zu construirenden vierten Proportionale, zu der halben kleinen, halben großen Axe und der gegebenen Entfernung des gesuchten Punktes von der großen Axe, die dieser Ellips-Ordinate correspondirende Ordinate des Kreises über der großen Axe erkennen, dann diese lociren und vom Fußpunkt derselben auf sie die gegebene Größe der Ellips-Ordinate tragen, um den dritten Punkt des zu construirenden Dreiecks zu bestimmen, den man alsdann nur mit den Brennpunkten durch gerade Linien zu verbinden hat. — Ganz anders aber muß durch die Annäherungsmethode verfahren werden. — Im vorgegebenen Falle wird der Construirende zuerst die Eigenschaften des zu bestimmenden dritten Punktes ins Auge fassen und leicht erkennen, daß derselbe

1) von der Grundlinie eine gegebene Entfernung haben soll;
2) so beschaffen seyn muß, daß die Summe seiner Entfernungen von den Endpunkten der Grundlinie einer gegebenen Linie gleich sey.

Für jede dieser Eigenschaften sucht er den geometrischen Ort zu construiren. — Wegen der erstern wird er eine Parallele mit der Grundlinie in der gegebenen Entfernung ziehen, aber wegen der vorausgesetzten Beschränkung seiner Kenntnisse kann er, um den Ort für die zweite Eigenschaft zu construiren, nur punktweise verfahren, d. h. er wird mit einem beliebigen Theil der gegebenen Summe als Radius von dem einen Endpunkt der Grundlinie als

Centrum einen Kreisbogen beschreiben, und diesen Kreisbogen vom zweiten Endpunkt aus durch einen andern Kreisbogen durchschneiden, dessen Radius dem Rest der Summe gleich ist. Wäre nun zufällig dieser Durchschnittspunkt in obige Parallele gefallen, so wäre dieser der gesuchte Punkt. Da dies aber höchst selten der Fall ist, so construirt er auf oben angegebene Weise diesseits und jenseits der Parallelen mit der Grundlinie mehrere solcher Punkte, und verbindet sie durch eine stätige Linie, so wird der Durchschnitt dieser und der Parallelen den gesuchten Punkt liefern und zwar um so genauer, als er in der Nähe der Parallelen diesseits und jenseits mehr Punkte einzeln scharf construirt hat, indem die Richtigkeit der stätigen Verbindung derselben dadurch steigernd erhöht und so die Genauigkeit der Zeichnung von des Construirenden graphischer Ausführung abhängig wird. —

Wie in diesem Beispiel, so wird in jeder andern Aufgabe, die Methode der Construction der nöthigen Curven jedesmal der Aufgabe selbst entnommen, und eben so wie in diesem Beispiel hängt auch bei jeder andern Aufgabe der Grad der Genauigkeit von der graphischen Ausführung, des in dieser Hinsicht unbeschränkten Zeichners, ab; da die Anzahl der Punkte, die er einzeln construiren will, lediglich ihm überlassen ist. — Auf diese Art macht sich der Techniker die gesammte Curven-Welt dienstbar und braucht weder Namen noch sonstige Eigenschaften der Curven zu kennen; ihm sind sie nichts als geometrische Oerter, die gegebenen Bedingungen genügen. Was er

von ihnen zu wissen nöthig hat, ist die Art und Weise, wie sie construirt werden, und die Methode hiezu liefert ihm die Aufgabe selbst, so wie sein eigener freier Wille die Schärfe der Construction bestimmt. — Welche Leichtigkeit und Schnelligkeit die geometrischen Aufgaben in Auflösung und Ausführung gewinnen, wenn zu dem Gebrauch des Lineals und des Zirkels auch oben erwähnte Curvenconstructionen gefügt werden, leuchtet von selbst ein.

Die Nothwendigkeit einer solchen Methode ist geschichtlich dargethan, indem selbst bei der genausten Bekanntschaft mit den Eigenschaften der krummen Linien mehrere Aufgaben aus der Geometrie descriptive, der Schattenlehre, Perspective, Land-, Wasser-, Straßen-, Brücken- und Schiffbaukunst und ähnlicher Constructionskünste auf obige Art gelöst werden, und daher auch in diesfallsigen Werken einzeln so vorgetragen vorkommen. — Aber noch nie ist diese Auflösungsmethode als eigener Unterrichtszweig behandelt worden. Dieß Verdienst gehört meinem innigst verehrten Lehrer und Freund, dem verstorbenen Obrist Tulla, über dessen übrigen Verdienste und Lebensverhältnisse man in dem vom Oberbaurath, Hauptmann Scheffel, nach den vorhandenen Quellen treu bearbeiteten Necrolog das weitere lesen kann. — Als ich nämlich im Jahr 1800 von Heidelberg hieher kam, um Tulla's Privatunterricht zu genießen, übte er mich immer in der Auflösung geometrischer Aufgaben und machte mich stets auf obige Methode dabei aufmerksam, weil er selbst erfahren, wie oft ihm diese den Weg zur reinen Construction

bahnte und in Fällen der Dringlichkeit schnell ihm eine Auflösung lieferte. — Zur Aufmunterung meiner jüngern Leser muß ich bemerken, daß mir diese, bei Tulla erworbene Uebung, nicht nur in Paris während meiner Studienzeit daselbst nützte, sondern auch manchen Freund auf meinen übrigen Reisen erwerben half, den ich vielleicht ohne diesen neuen Berührungspunkt nicht erworben hätte. —

Als im Jahr 1807 unter Carl Friedrichs erleuchteter Regierung nach Tulla's Antrag die hiesige Ingenieurschule errichtet, und ich als Professor dabei angestellt wurde, so empfahl mir Tulla ebenfalls sehr die Einübung der Ingenieur-Eleven in geometrischen Aufgaben, was auch geschah. — Meine Hoffnung, er werde selbst Etwas hierüber, als auch über so Vieles ihm Eigenthümliche ausarbeiten, ging nicht in Erfüllung, wegen der vielen praktischen Arbeiten, die ihm sowohl im In- als Auslande aufgetragen wurden und später wegen seiner Jahre lang dauernden Kränklichkeit. — Von der Unmöglichkeit, es selbst zu thun, überzeugt, trug er mir dies Geschäft auf, um so mehr, da er die Annäherungsconstructionen als Schluß meiner in zwei Theilen erschienenen geometrischen Constructionslehre, ansah. Er selbst nannte seine Constructionen unreine Constructionen, welchen Namen ich aber in Annäherungsconstructionen umwandeln zu müssen glaubte; jedoch dem Spruch: in verbis simus faciles, getreu, Jedem die Wahl lasse.

Früher durch mancherlei Hindernisse davon abgehalten,

entledige ich mich meines diesfallsigen Versprechens und Auftrages um so lieber, als ich die Erscheinung gerade jetzt für zeitgemäß und der Verbreitung von Tulla's Idee am geeignetsten halte, da nicht nur die hiesige polytechnische Schule erweitert, sondern auch an andern Orten Gewerbsschulen und technische Lehranstalten errichtet werden sollen, denen allen Tulla's Methode ein höchst willkommner Unterrichtszweig seyn muß; denn da Geometrie und die sogenannte gebundene Zeichnung (Vorübung zur Geometrie descriptive) in allen derartigen Anstalten Hauptlehrzweige sind und seyn müssen, so liefern die Annäherungsconstructionen ein treffliches Geistesgymnastisches Unterrichtsmittel, welches die erwähnten Zweige auf das innigste verbindet. — Ist nämlich die erste Einübung im Gebrauch des Cirkels und des Lineals durch Zeichnung geradlinichter und krummlinichter Figuren rc. erreicht, so kann als nothwendige Fortsetzung dieser graphischen Fertigkeit nichts schicklicher angereiht werden, als die Anwendung der Geometrie auf geometrische Aufgaben nach der Annäherungsmethode, von den leichtern zu den schwierigern übergehend. — Zeigt dann der Lehrer nach vollendeter Ausführung einer Aufgabe durch den Eleven, diesem eine reine Auflösung, habe er sie auf geometrischem oder analytischem Wege gefunden, das macht hier Nichts zur Sache, so hat der Eleve einen Erfahrungsbeleg über seine eigene Arbeit und freut sich entweder über die Richtigkeit seiner Ausführung, oder er weiß in künftigen Fällen, wo er genauer zu zeichnen hat, je nachdem obige Ver-

gleichung ausfällt. — Mancher Eleve wird auch angereizt, selbst reine Auflösungen zu suchen und auf alle Fälle wird für alle der Vortheil erreicht, daß sie nicht als bloße Copisten arbeiten, sondern das zu Zeichnende erst selbst erfinden lernen und dieser Gewinn ist von höherer Wichtigkeit, als Nicht-Pädagogen und Nicht-Methodiker glauben. Soll dem Industrie- und Gewerbswesen durch Unterricht wirklich geholfen werden, so kann dies nicht durch eine Art Dressur der niedern Techniker geschehen, sondern ist nur dadurch zu erreichen, daß mit dem Minimum des theoretischen Wissens das Maximum des Könnens auf geistige Weise hervorgelockt wird. — Mit einer kleinen Summe theoretischer Lehren muß der Gewerbsmann im praktischen Leben sich selbst zu helfen wissen, und dies lernt er nur, wenn er methodisch angeleitet wurde, wie er aus gegebenen Dingen andere zu schaffen hat, welche ihm sein Vorhaben ausführen helfen, oder mit andern Worten, er muß von den Datis zur Ausführung den Weg selbst finden lernen. Dies ist und bleibt des Lehrers Hauptzweck in allen Bildungsanstalten — von der Dorfschule bis zur Universität, von der Gewerbsschule bis zur Kunstacademie, von der Werkstätte des Handwerkers bis zum Attelier des Künstlers. — Nur auf diese Art fördert man auch die Ausführung großer Werke, weil nur so der höhere Techniker, welcher sinnend den Plan entwarf, beim Ausführen desselben, wegen der Verständigkeit und Pünktlichkeit der niedern Techniker, gehörig unterstützt wird. — Seine Anordnungen werden richtig aufgefaßt und mit

Einsicht befolgt, dadurch nicht blos Zeit gewonnen, sondern auch kein Stoff bei der Arbeit verdorben, also auch in finanzieller Hinsicht doppelter Gewinn bereitet. —

Außer der oben erwiesenen doppelten Wichtigkeit der geometrischen Annäherungsmethode in technischer Hinsicht, nämlich erstens, daß sie mit geringern theoretischen Mitteln geometrische Aufgaben construiren kann, und zweitens, daß sie einen wichtigen geistesgymnastischen Unterrichtszweig liefert, hat sie auch in theoretischer Hinsicht einen doppelten Nutzen. Einmal den, welchen sie als indirecte Auflösung im Allgemeinen darbietet. Dieser wird besonders bei Aufgaben, deren analytische Behandlung auf Gleichungen höherer Grade führt, ersichtlich. Mißt man nämlich die construirten Linien, welche die Unbekannten der Gleichung sind, nach dem Constructions-Maßstabe genau, so liefern diese sehr willkommne Substitutionswerthe und kürzen daher das mühevolle Versuchen äußerst ab, was um so beschwerlicher wird, je höher der Grad der Gleichung ist. Ein derartiges Beispiel liefert Aufgabe 22, welche auf Gleichungen vom 8ten und 16ten Grade führen kann. Zweitens ist sie jedem Lehrer der höhern Analysis eine unerschöpfliche Quelle für Aufgaben zur Einübung in der Analyse der Curven. Hiezu braucht er nur die erkannte Constructionsweise der Curve in die Sprache der Algebra zu übersetzen und nach irgend einem Coordinatensystem eine Gleichung zu bilden. — Da endlich Steiners geniale Constructionen auf der Kugelfläche (S. Crelles Journal für Mathematik) und

Pohls in Euclidischem Geiste verfaßte Geometrie der Sphäre ein neues Constructionsgebieth eröffneten, so wird aus ähnlichen Gründen die Annäherungsmethode auch auf der Kugelfläche angewandt werden und im vorkommenden Fall dem Techniker ein eben so willkommnes Hilfsmittel seyn, als dem Freund der analytischen Methode Gudermann's Grundriß der analytischen Sphärik, welche die Kugelfläche auf ähnliche Art behandelt, wie die sogenannte analytische Geometrie die Ebene und ihre Raumverhältnisse, ferner ebenfalls auf die construirende Geometrie glücklich einwirkt, indem sie auf die Vergleichung der Ebene mit der Kugelfläche ein großes Licht verbreitet, und das Aehnliche so wie das Verschiedene zwischen beiden aus andern Standpunkten beleuchtet. —

Fragen wir uns aber nun, wie ein solcher Unterricht zur Erlernung der Annäherungsconstructionen eingerichtet werden soll, dann finden wir uns dabei in der nämlichen Lage, wie bei reinen Constructionen und in der Algebra beim Ansetzen der Gleichungen. — Eben so wenig die letztere eine ganz allgemein geltende Regel, für den Lernenden faßlich, aufzufinden vermag, eben so wenig kann die construirende Geometrie eine durchgreifende Verfahrungsweise zur Auffindung der Auflösung ihrer Aufgaben, für Anfänger faßlich, angeben, und dort wie hier kann Uebung allein dem Lernenden die nöthige Gewandtheit verschaffen. — Daher muß hier, wie dort, eine Sammlung von Aufgaben, im Geist der betreffenden Methode aufgelöst, die Hauptsache thun, indem der durch sie geweckte Sinn und

die durch sie erhaltene Uebung dem Lernenden in andern Fällen den Weg zur Auflösung bahnen. —

Ueber die dieser Ansicht gemäß veranstaltete, zur Erleichterung der Anschaffung für Schulen nur kleine, Sammlung nachfolgender Aufgaben habe ich zu bemerken:

1) Um die Nothwendigkeit der Annäherungsmethode anschaulich zu machen, wurden unter andern auch Beispiele gewählt, die nur durch sie gelöst werden können, und wegen der Nützlichkeit auch praktische Aufgaben, so wie zur Veranschaulichung der Verschiedenheit der Methoden nach Euclid, Mascheroni und Tulla bei der Aufgabe: in einen Kreis ein reguläres Vieleck von beliebiger Seitenzahl zu beschreiben, die Anzahl der Seiten so gewählt wurde, daß eine Auflösung nach allen drei Methoden möglich ist.

2) Um einigermaßen ein Klassensystem einzuführen, wurden die Beispiele abgetheilt:

a. In solche, wo der gesuchte Punkt im Durchschnitt der Curve und einer geraden Linie, oder eines Kreises liegt.

b. In solche, wo der gesuchte Punkt im Durchschnitt zweier Curven liegt.

c. In solche, wo der gesuchte Punkt aus dem Durchschnitt der Curve und einer andern Linie, erst durch fernere Construction gefunden wird, d. h. wo der gesuchte Punkt nicht in der Curve liegt, deren Construction aber nöthig war, um eine andere Linie zu construiren, die ihn erst bestimmt.

Hiebei versteht es sich von selbst, daß diese Eintheilung nicht die Aufgaben, sondern die Auflösungen angeht, indem die nämliche Aufgabe auf verschiedene Weise nach den erwähnten Abtheilungen a, b und c aufgelöst werden kann, je nachdem die Aufgabe aufgefaßt wurde. Um dieß recht deutlich zu zeigen sind vielen Aufgaben mehrere Auflösungen beigefügt.

3) Auch sind Beispiele gewählt, an denen gezeigt wird, wie die Annäherungsconstructionen zu reinen Auflösungen führen.

4) Was die Angabe der Auflösungen selbst betrifft, so sind bei einer ziemlichen Anzahl von Aufgaben, die zu erfüllenden Bedingungen zuerst genau einzeln angegeben und dann der Reihenfolge nach die Construction der dadurch bestimmten geometrischen Oerter beschrieben; bei einem andern Theile derselben sind Begründung und Ausführung vermischt, und in einem dritten letztere allein ausführlich und erstere nur leise angedeutet angegeben, und zwar deßhalb, damit die Hauptverschiedenheiten der Bildungsstufen nicht unberücksichtigt und pedantisches Einerlei so wie unmethodische Willkühr bei der Darstellungsform gleich entfernt seyen. Die Lehrenden erhalten Gelegenheit zu Erklärungen über das Warum bei denjenigen Auflösungen, von welchen blos das Wie angegeben oder jenes nur leise angedeutet ist. Die Lernenden erhalten Stoff zu Fragen, zum Nachdenken, so wie zu schriftlichen Zusätzen nach erhaltener Aufklärung.

5) Zur Kostenersparung (ein Punkt, der auch bei Bear-

beitung des Textes sehr beachtet wurde) sind in den Figuren-Tafeln die meisten Curven nur zum Theil ausgezeichnet, daher auch nicht alle Punkte angegeben, die der Aufgabe genügen. — Beim Unterricht darnach müssen aber die Curven nicht blos wegen der oben angeführten Einübung im Gebrauch des Zirkels und Lineals, sondern deßhalb ausgeführt werden, damit die der Natur und dem Grade der Aufgabe entsprechende Anzahl Durchschnittspunkte zum Vorschein kommen, um dem zeichnenden Eleven durch sein eigenes Schaffen anschaulich zu machen, wie gemachten Forderungen oft auf verschiedene Weise entsprochen werden könne, und zwischen diesen den Umständen gemäß möglichst gut zu wählen sey. Ferner ist im Unterricht darauf zu sehen, daß, wie deßhalb in den Figuren meistens angedeutet ist, ein ähnlicher Unterschied zwischen gegebenen und gesuchten Stücken, und zwischen ähnlichen und Hilfslinien ꝛc. genau beobachtet wird; denn nur so ist neben der Geistesgymnastik graphische Fertigkeit zu erreichen.

Ehe ich mich nun zum Anhang wende, halte ich mich verpflichtet, wegen der thätigen Mitwirkung bei Entwurf und Ausführung, dieses dem Andenken Tulla's geweihten Lehrbuches, meinen ehemaligen Zuhörern und jetzigen werthen Amtsgenossen, dem Herrn Albert Kayser, Professor der angewandten Mathematik an der hiesigen polytechnischen Schule und an der Ingenieurschule, so wie Herrn Franz Keller, Assistent bei letzterer, öffentlich meinen Dank auszusprechen.

Hinsichtlich des Anhanges habe ich zu bemerken, daß ich zwar ebenfalls von Tulla beauftragt war, denselben zu bearbeiten, es aber geeigneter fand, dieß Geschäft dem verdienten Herrn Obergeometer Zipfel aufzugeben, welcher bei der topographischen Bestimmung des Rheinlaufes die Corrections- und Centrirungsmethode praktisch auszuüben Gelegenheit hatte. Der vollständige Titel der auf Kosten der Regierung in 18 Blättern erschienenen Karte ist:

Topographische Karte des Rheinstromes und seiner beiderseitigen Ufer, von Hüningen bis Lauterburg oder längs der französisch-badischen Grenze, nebst der in Folge der Pariser Friedensschlüsse vom Jahr 1814 und 1815 neu berichtigten Banngrenze zwischen den französischen und badischen Gemeinden, und den zur Sicherung der Grenzpunkte angenommenen Rheinmarken und Transversallinien. Nach den neuesten, während der Grenzberichtigung gemachten, Aufnahmen und andren Materialien reducirt und gezeichnet nach Scale Nr. 2, d ($\frac{1}{20000}$) im Bureau der Großherzoglich Badischen Rheingrenz-Berichtigungs-Commission; in Stein gestochen auf Höchsten Befehl Sr. Königl. Hoheit Ludwig Großherzogs von Baden. 1828.

Verzeichniß

der Aufgaben, nebst Angabe der Nummer der Steintafeln, worauf die Auflösungsfiguren sich finden.

Erste Abtheilung.

Beispiele über diejenigen Fälle, wo der gesuchte Punkt im Durchschnitt einer geraden oder krummen Linie, oder im Durchschnitt eines Kreises und der krummen Linie liegt. —

Aufgabe 1. Die Summe der Katheten eines rechtwinklichten Dreiecks, und die aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällte rechtwinklichte Linie sind gegeben; man soll das Dreieck construiren. Zwei Auflösungen. Taf. I. Fig. 1 und 2.

Aufgabe 2. Die Differenz der Katheten eines rechtwinklichten Dreiecks, und die Entfernung des Scheitels des rechten Winkels von der Hypothenuse sind gegeben; man soll das Dreieck construiren. Vier Auflösungen. Taf. I. Fig. 3 und 4. Taf. II. Fig. 1 und 2.

Aufgabe 3. Von einem rechtwinklichten Dreieck kennt man einen Katheten und denjenigen Theil der Hypothenuse, welcher zwischen dem andern Katheten und dem vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällten Perpendikel liegt. Man soll das Dreieck construiren. Vier Auflösungen. Taf. II. Fig. 3 und 4. Taf. III. Fig. 1 und 2.

Aufgabe 4. Von einem rechtwinklichten Dreieck kennt man die Länge derjenigen geraden Linien, welche von den Scheiteln der spitzen Winkel an die Mittelpunkte der gegenüberstehenden Katheten gezogen werden können. Man soll das Dreieck construiren. Zwei Annäherungs-Auflösungen und eine daraus abgeleitete reingeometrische Construction. Taf. III. Fig. 3 und 4. Taf. IV. Fig. 1.

Aufgabe 5. In einem gegebenen rechtwinklichten Dreieck A B C ist eine gerade Linie D E parallel mit einem Katheten B C gezogen. Man soll von diesem Katheten an den Scheitel A des gegenüberliegenden Winkels eine gerade Linie S A so ziehen, daß der zwischen den Parallelen B C und D E liegende Theil F S derselben gleich ist dem Stück F E der Linie D E, das zwischen der Hypothenuse A C und der verlangten Linie A S liegt. Eine Auflösung. Taf. IV. Fig. 2.

Aufgabe 6. Es ist ein rechtwinklichtes Dreieck gegeben. Man soll in demselben einen solchen von beiden Katheten gleich weit entfernten Punkt finden, daß das Dreieck, welches entsteht, wenn man diesen Punkt mit den Endpunkten der Hypothenuse durch gerade Linien verbindet, gleich ist dem Quadrat, das entsteht, wenn man von diesem Punkt auf die Katheten rechtwinklichte Linien zieht. Eine Auflösüng. Taf. IV. Fig. 3.

Aufgabe 7. Die Grundlinie, die Höhe und das Verhältniß der beiden übrigen Seiten sind gegeben. Man soll das Dreieck construiren. Zwei Annäherungsconstructionen und eine aus ihr abgeleitete rein geometrische. Taf. IV. Fig. 4. und Taf. V. Fig. 1.

Aufgabe 8. Aus der gegebenen Grundlinie, der Höhe und dem Produkt der beiden andern Seiten eines Dreiecks, das Dreieck zu construiren. Eine Auflösung. Taf. V. Fig. 2.

Aufgabe 9. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß sie von einem gegebenen Winkel, in dessen Schenkeln der gegebene Punkt nicht liegt, ein Dreieck von gegebenem Inhalt abschneidet. Eine Auflösung. Taf. V. Fig. 3.

Aufgabe 10. Es ist ein Winkel nebst einem Punkt gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie so ziehen, daß der zwischen die Schenkel des Winkels fallende Theil dieser Linie eine gegebene Größe habe. Eine Auflösung. Taf. V. Fig. 4.

Aufgabe 11. Eine Seite eines Dreiecks, der gegenüberstehende Winkel, und der Radius des eingeschriebenen Kreises sind gegeben. Man soll das Dreieck construiren. Zwei Annäherungsconstructionen und eine daraus abgeleitete rein geometrische. Taf. VI. Fig. 1, 2 und 3.

Aufgabe 12. Das Produkt zweier Linien gleich einem gegebenen Rechteck und die Differenz ihrer Quadrate gleich einem gegebenen Quadrat ist bekannt. Man soll beide Linien bestimmen. Drei Auflösungen. Taf. VI. Fig. 4. und Taf. VII. Fig. 1 und 2.

Aufgabe 13. Zwei gegebene concentrische Kreise durch eine gerade Linie so zu schneiden, daß die dadurch erhaltenen Kreissehnen ein gegebenes Verhältniß haben. — Eine Annäherungsconstruction und eine daraus abgeleitete rein geometrische. Taf. VII. Fig. 3 und 4.

Aufgabe 14. Die Größe zweier vom nämlichen Punkt der Peripherie eines Kreises gezogenen Sehnen und das Verhältniß der durch dieselben abgeschnittenen Kreisbogen ist gegeben. Man soll den Kreis construiren. Drei Auflösungen. Taf. VIII. Fig. 1, 2 und 3.

Aufgabe 15. In einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Viereck von einer gegebenen Anzahl Seiten einzuschreiben. Eine Auflösung. Taf. VIII. Fig. 4.

Aufgabe 16. Ein Kreis und zwei Punkte sind gegeben; man soll in der Peripherie des Kreises einen solchen Punkt finden, daß die Differenz seiner Entfernungen von den zwei Punkten einer gegebenen Linie gleich sey. Zwei Auflösungen und eine dritte angedeutet. Taf. IX. Fig. 1 u. 2.

Aufgabe 17. Ein Kreis und zwei Punkte sind gegeben, man soll in der Peripherie des Kreises einen Punkt so bestimmen, daß die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den zwei Punkten gleich sey dem Quadrat einer gegebenen Linie. Zwei Auflösungen. Taf. IX. Fig. 3 und 4.

Aufgabe 18. Von einem rechtwinklichten Dreieck kennt man das Produkt der Katheten, gleich einem gegebenen Rechteck, und die aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällte Rechtwinklichte gleich einer gegebenen Linie. — Man soll das Dreieck construiren. Eine Auflösung. Taf. X. Fig. 1.

Aufgabe 19. Durch den Scheitel eines gegebenen Winkels, dessen Schenkel gegebenen Linien gleich sind, eine gerade Linie so zu ziehen, daß, wenn man von den Endpunkten der Schenkel auf dieselbe rechtwinklichte gerade Linien zieht, die dadurch entstandenen rechtwinklichten Dreiecke an Inhalt einander gleich sind. — Eine Auflösung. Taf. X. Fig. 2.

Zweite Abtheilung.

Beispiele über diejenigen Fälle, wo der gesuchte Punkt im Durchschnitt zweier krummen Linien liegt. —

Aufgabe 20. Man kennt die Länge zweier sich rechtwinklicht schneidenden Sehnen eines Kreises und die Entfernung ihres Durchschnittspunktes vom Mittelpunkt des Letztern. Man soll den Kreis zeichnen. Zwei Auflösungen. Taf. X. Fig. 3 und 4.

Aufgabe 21. Die Länge der Tangente eines Kreises, vom Berührungspunkt an gerechnet, und das Produkt aus den Entfernungen des Endpunktes der Tangente vom Mittelpunkt und von der Kreisperipherie (gleich einem gegebenen Rechteck) sind bekannt, man soll den Kreis construiren. — Eine Auflösung. — Tab. XI. Fig. 1.

Aufgabe 22. Ein Beobachter befindet sich in einer gewissen Höhe über einer Horizontalebene. Er mißt die Winkel, welche die Gesichtsstrahlen mit einander bilden, die nach drei in genannter Horizontalebene liegenden Punkten gezogen sind. Die Lage dieser drei Punkte ist auf einer Karte gegeben; man soll den vierten Punkt, nämlich den Ort des Beobachters ebenfalls in die Karte eintragen. — Zwei Auflösungen. Taf. XI. Fig. 2 und 3.

Dritte Abtheilung.

Beispiele über diejenigen Fälle, wo der Punkt aus dem Durchschnittspunkt der krummen Linie und einer andern erst durch fernere Construction gefunden wird.

Aufgabe 23. Eine gegebene gerade Linie in zwei solche Theile zu theilen, daß das Quadrat des einen Theils gleich ist dem Rechteck aus dem andern Theil in eine gegebene Linie. Eine Auflösung und eine angedeutet. Taf. XI. Fig. 4.

Aufgabe 24. Ein Kreis und zwei Punkte sind gegeben, man soll in der Peripherie des Kreises einen Punkt finden, so daß die von diesem Punkt nach den gegebenen Punkten gezogenen geraden Linien

mit der Tangente des zu suchenden Punktes der Peripherie gleiche Winkel bilden. (Eine für zeichnende Künstler interessante Aufgabe wegen des sogenannten Glanzpunktes). Zwei Auflösungen. Taf. XII. Fig. 1 und 2.

Aufgabe 25. Einen gegebenen Winkel in zwei solche Theile zu theilen, daß das Rechteck aus den Sinus derselben für einen gegebenen Radius einem gegebenen Rechteck gleich sey. Eine Auflösung. Taf. XII. Fig. 3.

Aufgabe 26. Von einem Rhombus ist gegeben ein Winkel und die Summe einer Seite und der Höhe. Man soll den Rhombus construiren. Eine Annäherungsconstruction und eine daraus abgeleitete rein geometrische. Taf. XII. Fig. 4 und 5.

Anmerkung. Die durch stätige Verbindung einzelner, rein geometrisch bestimmter, Punkte construirte Linie wurde bei den Abtheilungen der Aufgaben nur vorzugsweise krumme Linie genannt, weil sie am häufigsten so erscheint. Daß sie aber auch eine gerade Linie seyn kann, beweist vorstehende Aufgabe.

Anhang.

Beispiele über diejenigen Fälle, wo der gesuchte Punkt im Durchschnitt einer geraden und der krummen Linie oder im Durchschnitt eines Kreises und der krummen Linie liegt.

Aufgabe 1.

Die Summe der Katheten eines rechtwinklichten Dreiecks, und die aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällte rechtwinklichte Linie sind gegeben, man soll das Dreieck construiren.

Auflösung.

Taf. I. Fig 1.

Die Hauptpunkte, worauf es bei derartigen Auflösungen ankommt, bestehen allgemein in folgenden:

1) Man suche die Aufgabe in ihren Bestandtheilen klar aufzufassen, d. h. man suche die Bedingungen, welche der gesuchte Punkt, die gesuchte Linie rc. erfüllen soll, einzeln zu erkennen.

2) Für jede dieser einzeln erkannten Eigenschaften suche man den geometrischen Ort, d. h. diejenige Linie, wovon jeder Punkt die verlangte Eigenschaft hat. Jeder Durchschnittspunkt dieser geometrischen Orte entspricht der Eigenschaft sowohl des einen, wie des andern Ortes, und bestimmt daher unmittelbar oder mittelbar das Gesuchte.

Suchen wir die Bedingungen, welchen das verlangte Dreieck vorliegender Aufgabe zu entsprechen hat, auf, so ergibt sich, daß:

a) einer seiner Winkel ein rechter

b) die Summe seiner Katheten gleich einer gegebenen Linie, und

c) die Entfernung vom Scheitel des rechten Winkels desselben zu der Hypothenuse auch einer gegebenen Linie gleich seyn muß.

Deßwegen ziehe man:

1) eine gerade Linie A B gleich der gegebenen Summe der Katheten.

2) Von dem Endpunkt B derselben aus ziehe man eine gerade Linie B E, die mit jener einen halben rechten Winkel bildet, so ist jeder Punkt derselben die Spitze eines rechtwinklichten Dreiecks, wovon ein Kathet, von A aus gerechnet, in der Linie A B liegt, und wovon die Summe der Katheten gleich ist der Linie A B. Die Linie B E ist also der geometrische Ort der Punkte, die der Bedingung b entsprechen.

3) Aus willkührlichen Punkten F der Linie A B errichte man auf letztere rechtwinklichte Linien F G, gegen die Linie B E hin.

4) Von den Punkten F aus, als Mittelpunkte, ziehe man Kreisbogen mit einer Eröffnung des Zirkels gleich der gegebenen Entfernung des Scheitels des rechten Winkels von der Hypothenuse.

5) Von A aus ziehe man Tangenten A I an diese Kreisbogen bis sie die entsprechenden der Linien F G in I treffen, so bilden sie mit A B und F G rechtwinklichte Dreiecke, in welchen die Perpendikel von den Scheiteln der rechten Winkel auf die Hypothenusen alle der gegebenen Größe gleich sind.

6) Die Punkte I vereinige man der Reihe nach durch eine stetige krumme Linie, so ist diese der geometrische Ort für alle Punkte, welche der Bedingung c entsprechen. Deßwegen sind die Durchschnittspunkte dieser krummen Linie und der geraden Linie B E die Spitzen rechtwinklichter Dreiecke, die der Bedingung b sowohl, als der Bedingung c entsprechen.

Man lasse daher:

7) von den erwähnten Durchschnittspunkten s und s′ gerade Linien rechtwinklicht auf A B fallen; vereinige

8) die nämlichen Durchschnittspunkte mit dem Punkte A durch die geraden Linien A s und A s′ so erhält man zwei Dreiecke, welches die verlangten sind, indem jedes von ihnen, vermöge 6 den Bedingungen b und c und vermöge 7 auch der Bedingung a entspricht.

Andere Auflösung.
Taf. I. Fig. 2.

Nr. 1 und 2 wie vorhin.

3) Vom Punkt A aus ziehe man gerade Linien A G an die Linie B E.

4) Von den Punkten G lasse man gerade Linien G F rechtwinklicht auf A B fallen, so wird man Dreiecke A F G erhalten, die den Bedingungen a und b entsprechen, aber nicht alle der Bedingung c.

5) Durch den Scheitel F des rechten Winkels jedes dieser Dreiecke ziehe man eine gerade Linie rechtwinklicht auf die Hypothenuse, und schlage

6) von den Fußpunkten C dieser Perpendikel in der Hypothenuse die gegebene Entfernung des Scheitels des rechten Winkels von der Hypothenuse gegen F hin auf den Perpendikeln ab.

7) Die so erhaltenen Punkte I verbinde man der Reihe

nach durch eine stetige krumme Linie, so ist sie der geometrische Ort für die Bedingung c. Die Durchschnittspunkte s dieser krummen Linie mit der geraden Linie A B entsprechen also allen Bedingungen, und sind mithin die Scheitel der rechten Winkel der verlangten Dreiecke. Errichtet man also

8) von diesen Durchschnittspunkten aus auf A B rechtwinklichte Linien bis an B E und zieht

9) von den Punkten, wo sie diese treffen, gerade Linien nach A, so erhält man die verlangten Dreiecke.

Aufgabe 2.

Die Differenz der Katheten eines rechtwinklichten Dreiecks, und die Entfernung des Scheitels des rechten Winkels von der Hypothenuse ist gegeben; man soll das Dreieck construiren.

Erste Auflösung.

Taf. I. Fig. 3.

Die Bedingungen, welchen das verlangte Dreieck zu entsprechen hat, sind:

a) Einer seiner Winkel muß ein rechter seyn.

b) Die Differenz seiner Katheten muß gleich seyn einer gegebenen Linie.

c) Die Entfernung des Scheitels des rechten Winkels von der Hypothenuse muß ebenfalls einer gegebenen Linie gleich seyn.

Man ziehe deßwegen

1) eine gerade Linie A B gleich der gegebenen Differenz der Katheten.

2) Man verlängere dieselbe durch einen ihrer Endpunkte unbestimmt gegen C hin.

3) Von B aus ziehe man eine gerade Linie B D, die

mit B C einen halben rechten Winkel bildet. Jeder Punkt derselben ist die Spitze eines rechtwinklichten Dreiecks, welches der Bedingung b entspricht, wenn einer seiner Katheten von A aus in der Linie A C liegt.

4) Von beliebigen Punkten der Linie B C errichte man, gegen B D hin, gerade Linien G F rechtwinklicht auf B C.

5) Von ihren Fußpunkten F aus als Mittelpunkten ziehe man Kreise mit einem Radius gleich der gegebenen Entfernung des Scheitels des rechten Winkels von der Hypothenuse.

6) Von A aus ziehe man Tangenten an diese Kreise, bis sie die entsprechenden der Linien F G in den Punkten H treffen.

7) Diese Punkte verbinde man der Reihe nach durch eine stetige krumme Linie, so ist jeder Punkt derselben die Spitze eines rechtwinklichten Dreiecks, welches die Bedingung c erfüllt, wenn der eine Kathet die in 3 angegebene Lage hat. Daher muß der Durchschnittspunkt s dieser krummen Linie und der geraden B D die Spitze eines Dreiecks seyn, welches allen Bedingungen entspricht. Mithin lasse man

8) von gedachtem Durchschnittspunkt s eine rechtwinklichte gerade s t auf die Linie B C fallen, und vereinige

9) den nämlichen Durchschnittspunkt mit dem Punkt A durch die gerade Linie A s, so ist das dadurch entstandene Dreieck A s t das verlangte, indem es vermöge 7, den Bedingungen b und c, und vermöge 8, der Bedingung a, entspricht.

Zweite Auflösung.

Taf. I. Fig. 4.

Nr. 1, 2 und 3 bleiben dieselben, wie in der vorigen Auflösung.

4) Man errichte auf dem einen Schenkel B C des halben rechten Winkels, von beliebigen Punkten F aus, senkrechte Linien, bis sie den andern Schenkel B D in den Punkten G treffen.

5) Man ziehe von diesen Punkten nach A gerade Linien, so erhält man Dreiecke, die den Bedingungen a und b entsprechen.

6) Durch den Scheitel F des rechten Winkels jedes dieser Dreiecke ziehe man eine gerade Linie rechtwinklicht auf die Hypothenuse und schlage

7) von den Fußpunkten K dieser Perpendikel in der Hypothenuse die gegebene Entfernung des Scheitels des rechten Winkels von der Hypothenuse gegen F hin auf den Perpendikel ab.

8) Die so erhaltenen Punkte I verbinde man der Reihe nach durch eine stetige krumme Linie, so ist ihr Durchschnittspunkt mit der Linie B C der Scheitel des rechten Winkels des verlangten Dreiecks.

9) Man errichte von diesem Durchschnittspunkt aus auf A B eine rechtwinklichte Linie bis an B D und ziehe

10) von dem Punkt, wo sie diese trifft, eine gerade Linie nach A, so erhält man das verlangte Dreieck.

Dritte Auflösung.
Tab. II. Fig. 1.

1) Man zeichne einen halben rechten Winkel G A C.

2) Man errichte auf einen seiner Schenkel z. B. A C rechtwinklichte Linien F G bis an den andern Schenkel.

3) Auf jeden dieser Perpendikel trage man von seinem Fußpunkt im Schenkel A C aus die gegebene Differenz F K der Katheten.

4) Trage den Rest K G des Perpendikels von F aus

auf A C gegen C hin, daß also F M = G K wird, und ziehe

5) die Linien G M, so erhält man rechtwinklichte Dreiecke, welche den Bedingungen a und b entsprechen.

6) Um auch der Bedingung c zu genügen, ziehe man durch den Scheitel F des rechten Winkels in jedem dieser Dreiecke auf die Hypothenuse G M eine rechtwinklichte Linie, und trage von der Hypothenuse aus auf sie die gegebene Länge des Perpendikels.

7) Die hiedurch erhaltenen Punkte verbinde man der Reihe nach durch eine stetige krumme Linie mit einander, und bemerke den Punkt S, wo diese den Schenkel A C schneidet.

8) Eine ähnliche Zeichnung eines rechtwinklichten Dreiecks, diesen Durchschnittspunkt als Scheitel des rechten Winkels betrachtet, wie in 2, 3, 4 und 5 dieser Auflösung, gibt das verlangte Dreieck.

Vierte Auflösung.

Taf. II. Fig. 2.

1) Man zeichne einen rechten Winkel, trage

2) von seinem Scheitel aus auf die unbestimmt langen Schenkel zwei Linien ab, die sich um die gegebene Differenz der Katheten von einander unterscheiden, und vereinige

3) ihre Endpunkte durch eine gerade Linie, so erhält man ein Dreieck, das den Bedingungen a und b entspricht.

4) Auf diese Art zeichne man mehrere Dreiecke, fälle auf die Hypothenuse eines jeden desselben vom Scheitel des rechten Winkels aus, Perpendikel und verbinde

5) ihre Fußpunkte der Reihe nach durch eine stetige krumme Linie, so wird in dieser offenbar der Fußpunkt eines Perpendikels liegen müssen, welcher einem Dreieck angehört, das den zu erfüllenden Bedingungen entspricht.

6) Man ziehe deßhalb vom Scheitel des rechten Winkels aus, als Mittelpunkt, einen Kreis mit einem Radius gleich dem gegebenen Perpendikel.

7) Durch den Punkt, wo er die in Nr. 5 erhaltene krumme Linie trifft, ziehe man eine Tangente an den Kreis, so wird sie das verlangte Dreieck zwischen den Schenkeln des rechten Winkels abschneiden.

Aufgabe 3.

Von einem rechtwinklichten Dreieck kennt man einen Katheten und denjenigen Theil der Hypothenuse, welcher zwischen dem andern Katheten und dem vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällten Perpendikel liegt. Man soll das Dreieck construiren.

Erste Auflösung.
Taf. II. Fig. 3.

Die Bedingungen, welche das zu zeichnende Dreieck erfüllen muß, sind folgende:

a) Einer seiner Winkel muß ein rechter seyn.

b) Wenn man den Perpendikel vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse fällt, so muß einer der entstandenen Abschnitte einer gegebenen Linie gleich seyn.

c) Der mit diesem Abschnitt nicht verbundene Kathet muß ebenfalls einer gegebenen Linie gleich seyn.

Deßwegen beschreibe man

1) über den gegebenen Katheten **A B** einen Halbkreis, als geometrischen Ort, worin sich der eine Endpunkt des erwähnten Abschnitts oder der Fußpunkt des vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällten Perpendikels befindet.

2) Aus dem einen Endpunkt **B** errichte man eine gerade Linie **B C** rechtwinklicht auf den Katheten.

3) Von dem andern Endpunkt **A** aus ziehe man durch die Linie **B C** gerade Linien **A G**, so erhält man Dreiecke **A B G**, welche einen rechten Winkel und den gegebenen Katheten enthalten, mithin den Bedingungen a und c entsprechen.

4) Von den Punkten **D**, wo die Linien **A G** den Halbkreis schneiden, trage man auf diese Linien gegen **B C** hin den gegebenen Abschnitt der Hypothenuse.

5) Die so erhaltenen Punkte **E** vereinige man der Reihe nach durch eine stetige krumme Linie, so wird ihr Durchschnitt **S** mit der Linie **B C** der Punkt seyn, von wo aus man die Hypothenuse des verlangten Dreiecks **A B S** ziehen kann.

Anmerkung. Wenn die vom rechten Winkel in die Hypothenuse gezogene Linie einen schiefen Winkel mit dieser bildet, so braucht man nur statt des Halbkreises einen Bogen über den gegebenen Katheten zu zeichnen, welcher den gegebenen Winkel faßt; das übrige Verfahren ist dem obigen ganz ähnlich.

Eben so leicht ist die Abänderung der Auflösung für die Fälle, wo das Dreieck ein schiefwinklichtes seyn soll, oder wenn statt des Abschnitts auf einer Seite, das Verhältniß der beiden Abschnitte gegeben ist.

Zweite Auflösung.
Tab. II. Fig. 4.

Geht man von dem Gesichtspunkt aus, daß der Scheitel des rechten Winkels des verlangten Dreiecks in einem über die Hypothenuse, als Durchmesser, beschriebenen Halbkreis liegen muß, so ergibt sich folgende Auflösung:

1) Man ziehe eine gerade Linie von unbestimmter Länge,

und trage von ihrem Endpunkt C aus den gegebenen Abschnitt C F auf ihr ab.

2) Aus dem Punkt F errichte man eine gerade Linie F D rechtwinklicht auf C F, so muß in dieser der Scheitel des rechten Winkels vom verlangten Dreieck liegen.

3) Von C trage man auf die zuerst gezogene Linie beliebige Durchmesser C E und beschreibe über sie Halbkreise, so liegen in diesen die Scheitel der rechten Winkel derjenigen Dreiecke, die den Bedingungen a und c entsprechen.

4) Von den nicht gemeinschaftlichen Endpunkten E der Durchmesser als Mittelpunkten mit einem Radius, gleich dem gegebenen Katheten, durchschneide man die Halbkreise durch Kreisbogen, so sind die Durchschnittspunkte die gedachten Scheitel der rechten Winkel.

5) Diese Scheitel verbinde man der Reihe nach durch eine stetige krumme Linie, so wird der Durchschnittspunkt S derselben mit der geraden F D der Scheitel seyn, welcher allen Bedingungen entspricht.

6) Von S ziehe man eine gerade Linie nach C, und ebenfalls von S aus

7) auf S C eine rechtwinklichte bis an die Linie in Nr. 1 so erhält man das verlangte Dreieck.

Dritte Auflösung.

Taf. III. Fig. 1.

Nr. 1, 2 und 3, wie in voriger Auflösung.

4) Von den Endpunkten C und E der Durchmesser ziehe man gerade Linien an die Punkte A, wo F D von den Halbkreisen geschnitten wird.

5) Von den Punkten A aus trage man auf die Linien A E den gegebenen Katheten in A G.

6) Die so erhaltenen Punkte vereinige man der Reihe nach durch eine stetige krumme Linie, so ist der Durchschnittspunkt s derselben mit C E der Eckpunkt und C s die Hypothenuse des verlangten Dreiecks. Daher beschreibe man

7) über C s als Durchmesser einen Halbkreis, und ziehe

8) Von dem Punkt T, wo derselbe die Linie F D schneidet, gerade Linien nach C und s, so ist das Dreieck C T s das verlangte.

Vierte Auflösung.

Taf. III. Fig. 2.

1) Man zeichne einen rechten Winkel A B C und mache einen seiner Schenkel A B gleich dem gegebenen Katheten.

2) Man beschreibe über A B einen Halbkreis.

3) Von A aus ziehe man beliebige Linien A C an den andern Schenkel B C.

4) Von hier aus schlage man den gegebenen Abschnitt auf jeder der Linien A C ab, und verbinde

5) die dadurch erhaltenen Punkte F, der Reihe nach durch eine stetige krumme Linie.

6) Durch den Durchschnittspunkt S dieser krummen Linie und des in Nr. 2 gezogenen Halbkreises ziehe man von A aus die gerade Linie A G bis an den Katheten A C, so bildet diese mit den beiden Schenkeln des rechten Winkels ein Dreieck, welches allen Forderungen genügt.

Aufgabe 4.

Von einem rechtwinklichten Dreieck kennt man die Länge derjenigen geraden Linien, welche von den Scheiteln der

spitzen Winkel an die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Katheten gezogen werden können. Man soll das Dreieck zeichnen.

Auflösung.

Taf. III. Fig. 3.

Die Auflösung dieser Aufgabe besteht in der Erfüllung folgender Bedingungen:

a. Ein Winkel des verlangten Dreiecks muß ein rechter seyn.

b und c. Die von den Halbirungspunkten der Katheten an die Scheitel der gegenüberliegenden Winkel gezogenen geraden Linien müssen gegebenen Linien **A D** und **B C** gleich seyn.

Deßwegen ziehe man

1) eine gerade Linie **V F**,

2) aus irgend einem Punkt **E** derselben rechtwinklicht auf sie eine gerade Linie **E G**.

3) Aus beliebigen Punkten **I** dieser letztern als Mittelpunkten durchschneide man die erstere in **K** durch Kreisbogen, deren Radien sämmtlich gleich sind der gegebenen Linie **B C**.

4) Die Entfernungen der Punkte **I** von **E** trage man von erstern aus entgegengesetzt auf die Linie **E G** in **I H** und ziehe

5) die Linien **H K**, so erhält man Dreiecke **H K E**, welche der Bedingung a, und eine der Bedingungen b oder c, entsprechen.

6) Von den Mittelpunkten **L** der Seiten **E K** dieser Dreiecke ziehe man gerade Linien **L M** durch die Punkte **H**.

7) Von den Punkten **L** aus als Mittelpunkten durchschneide man dieselben in **N** durch Kreisbogen, deren Radien gleich sind der zweiten der gegebenen Linien, nämlich gleich **A D**.

8) Die so erhaltenen Punkte N vereinige man durch eine stetige krumme Linie.

9) Die Entfernung des Durchschnittspunkts S dieser krummen Linie und der geraden E G halbire man in O.

10) Vom Punkt O aus als Mittelpunkt durchschneide man die Linie V E durch einen Kreisbogen, dessen Radius gleich der gegebenen Linie B C ist;

11) ziehe vom Durchschnittspunkt U aus nach S die gerade Linie U S, so ist E U S das verlangte Dreieck.

Zweite Auflösung.

Taf. III. Fig. 4.

1) Man zeichne eine gerade Linie A D, gleich einer der gegebenen unb beschreibe

2) über sie einen Halbkreis.

3) Man bestimme den Punkt F in der Linie A D so, daß F D der dritte Theil von A D ist.

4) Von F aus als Mittelpunkt ziehe man innerhalb des Halbkreises den Kreisbogen G G mit einem Radius gleich dem dritten Theil der andern gegebenen Linie, und auf der entgegengesetzten Seite mit einem Radius, gleich zwei Drittel derselben Linie, den Kreisbogen H H.

5) Durch den Punkt F ziehe man gerade Linien G H von einem dieser Kreisbogen zum andern.

6) Von den Punkten H aus ziehe man durch D und von A aus durch die Punkte G gerade Linien.

7) Die Punkte L, wo sich die correspondirenden dieser Linien durchschneiden, verbinde man mit einander durch eine stetige krumme Linie.

8) Von dem Durchschnittspunkt S dieser krummen Linie mit dem Halbkreis ziehe man eine gerade Linie nach A,

9) von demselben Durchschnittspunkt eine gerade Linie durch D bis an den Kreisbogen H H und

10) vom Punkt B, wo sie denselben trifft, eine gerade Linie nach A, so ist das Dreieck A B S das verlangte.

Diese Auflösung hat auf eine reine Construction geführt, indem die genauere Betrachtung der erhaltenen krummen Linie L L gezeigt hat, daß sie ein Kreisbogen ist.

In der Verlängerung von A D bestimme man nämlich den Punkt I, so daß D I gleich F D wird; von I aus ziehe man nach irgend einem der Punkte L die gerade Linie I L, ferner ziehe man von A nach dem correspondirenden der Punkte H und von D nach dem correspondirenden der Punkte G eine gerade Linie, so verhält sich

$AF : FH = FD : FG$ und

Winkel $AFH =$ Winkel DFG, daher

Dreieck $AFH \backsim$ Dreieck GFD, also ist

GD parallel mit AH.

Wegen der Ähnlichkeit dieser Dreiecke verhält sich auch

$$GD : AH = FD : FA$$
$$= 1 : 2$$

Es folgt hieraus weiter, daß

Dreieck $GDL \backsim$ Dreieck AHL

also verhält sich

$$LD : LH = DG : AH$$
$$= 1 : 2$$

daher ist $LD = DH$, ferner ist

$DI = FD$

Winkel $LDI =$ Winkel FDH mithin

Dreieck $LDI \cong$ Dreieck FDH, also auch

$LI = FH$

L I ist also gleich einer beständigen Größe, nämlich gleich zwei Drittel von einer der gegebenen Linien. Die Punkte L, L, L 2c. liegen also in einem Kreis, wovon I das Centrum ist.

Hierauf gründet sich folgende rein geometrische Construction: Taf. IV. Fig. 1.

1) Man ziehe eine gerade Linie A D gleich der gegebenen.

2) Ueber dieselbe beschreibe man einen Halbkreis.

3) Die Linie A D verlängere man bis I, so daß D I gleich dem dritten Theil von A D wird.

4) Aus dem Punkt I als Mittelpunkt ziehe man mit einem Radius gleich zwei Drittel der zweiten gegebenen Linie einen Kreis.

5) Vom Punkt S, wo er den Halbkreis schneidet, ziehe man nach A eine gerade Linie.

6) Vom nämlichen Punkt S ziehe man durch D eine gerade Linie S B, so daß D B gleich S D wird, ziehe

7) von B nach A eine gerade Linie, so ist A B S das verlangte Dreieck.

Aufgabe 5.

Taf. IV. Fig. 2.

In einem gegebenen rechtwinklichten Dreieck A B C ist eine gerade Linie D E parallel mit einem Katheten B C gezogen. Man soll von diesem Katheten an den Scheitel A des gegenüberliegenden Winkels eine gerade Linie S A so ziehen, daß der zwischen den Parallelen B C und D E liegende Theil F S derselben gleich ist dem Stück F E der Linie D E, das zwischen der Hypothenuse A C und der verlangten Linie A S liegt.

Auflösung.

1) Von A aus ziehe man gerade Linien A G durch den Katheten B C.

2) Auf dieselben trage man von den Punkten H, wo sie die Linie E D schneiden, gegen den Katheten B C hin,

die Abstände H E der genannten Durchschnittspunkte von dem in der Hypothenuse liegenden Endpunkt E der Linie D E.

3) Die dadurch erhaltenen Punkte I vereinige man der Reihe nach durch eine stetige krumme Linie.

4) Vom Durchschnittspunkt S dieser krummen Linie und des Katheten B C ziehe man nach A eine gerade Linie, so ist sie die verlangte.

Aufgabe 6.

Es ist ein rechtwinklichtes Dreieck gegeben. Man soll in demselben einen solchen von beiden Katheten gleich weit entfernten Punkt finden, daß das Dreieck, welches entsteht, wenn man diesen Punkt mit den Endpunkten der Hypothenuse durch gerade Linien verbindet, gleich ist dem Quadrat, das entsteht, wenn man von diesem Punkt auf die Katheten rechtwinklichte Linien zieht.

Auflösung.

Taf. IV. Fig. 3.

Die Bedingungen, welche man bei Auflösung dieser Aufgabe zu erfüllen hat, sind folgende:

a) Der gesuchte Punkt muß von beiden Katheten gleichweit entfernt seyn.

b) Das Produkt aus der halben Hypothenuse in ihre Entfernung von dem zu suchenden Punkt muß gleich seyn dem Quadrat jedes vom zu suchenden Punkt auf die Katheten zu fällenden Perpendikels.

1) Man halbire deshalb den rechten Winkel des gegebenen Dreiecks, so entspricht jeder Punkt der Halbirungslinie der Bedingung a.

2) Von beliebigen Punkten A der Halbirungslinie fälle man Perpendikel auf einen der Katheten.

3) Zur halben Hypothenuse und jedem dieser Perpendikel suche man die dritte geometrische Proportionale.

4) Von denselben Punkten A aus ziehe man rechtwinklichte Linien auf die Hypothenuse und mache jede von ihnen gleich der correspondirenden der vorhergefundenen Proportionalen.

5) Die so erhaltenen Punkte B vereinige man mit einander durch eine stetige krumme Linie, so entsprechen die Punkte derselben der Bedingung b.

6) Von dem Punkt wo sie die Hypothenuse schneidet, errichte man auf die Hypothenuse eine rechtwinklichte Linie, so ist ihr Durchschnittspunkt mit der Halbirungslinie des rechten Winkels der verlangte Punkt.

Aufgabe 7.

Die Grundlinie, die Höhe und das Verhältniß der beiden übrigen Seiten eines Dreiecks sind gegeben. Man soll das Dreieck construiren.

Auflösung.

Taf. IV. Fig. 4.

Das Dreieck muß folgende Bedingungen erfüllen:

a) eine seiner Seiten muß einer gegebenen Linie gleich seyn.

b) Der Scheitel des ihr gegenüberliegenden Winkels muß eine gegebene Entfernung von derselben haben.

c) Die zwei andern Seiten des Dreiecks müssen in dem gegebenen Verhältniß zu einander stehn.

Man ziehe daher

1) zur Erfüllung der Bedingung a eine gerade Linie A B gleich der gegebenen Grundlinie des Dreiecks.

2) In einer Entfernung von ihr gleich der gegebenen Höhe ziehe man eine Parallele C D mit derselben; so

liegt in dieser die Spitze des gesuchten Dreiecks, und entspricht somit der Bedingung b.

3) Von dem einen Endpunkt A der Grundlinie aus ziehe man gerade Linien A E an die Linie C D.

4) Von dem andern Endpunkt B ziehe man gerade Linien durch die Punkte E.

5) Man suche Linien, die zu den Linien A E das gegebene Verhältniß der Dreiecksseiten haben, und trage sie von B aus auf die correspondirenden der Linien B E.

6) Die dadurch erhaltenen Punkte F vereinige man mit einander durch eine stetige krumme Linie.

7) Von ihrem Durchschnittspunkt S mit C D ziehe man gerade Linien nach A und B, so entspricht dasselbe vermöge Nr. 6 der Bedingung c, vermöge Nr. 1 und 2 den Bedingungen a und b, und ist mithin das verlangte.

Andere Auflösung.

Taf. V. Fig. 1.

Nr. 1 und 2 wie in vorhergehender Auflösung.

Nr. 3. Von A aus als Mittelpunkt ziehe man Kreisbogen mit beliebigen Radien.

Nr. 4. Von B aus als Mittelpuukt durchschneide man sie durch Kreisbogen, deren Radien zu den Radien jener das gegebene Verhältniß der Dreiecksseiten haben.

Nr. 5. Die so erhaltenen Punkte F vereinige man durch eine stetige krumme Linie, so ist ihr Durchschnittspunkt S mit der Linie C D der nämliche wie in voriger Auflösung.

Nach der Kreislehre ist die in dieser Auflösung erhaltene krumme Linie ein Kreis, welcher zu folgender rein geometrischen Auflösung führt.

1) Man ziehe die Linien A B und C D wie in voriger Auflösung.

2) Bestimme in der Linie A B den Punkt E so, daß die Theile A E und E B das gegebene Verhältniß der Dreiecksseiten zu einander haben.

3) In der Verlängerung von A B bestimme man den Punkt O so, daß sich verhält

$$AE - EB : AE = BE : EO$$

4) Vom Punkt O als Mittelpunkt aus ziehe man durch E einen Kreis.

5) Aus dem Punkt S wo er die Linie C D trifft, ziehe man nach A und B gerade Linien, so ist A B S das verlangte Dreieck.

Aufgabe 8.

Aus der gegebenen Grundlinie, der Höhe, und dem Produkt der beiden andern Seiten eines Dreiecks, das Dreieck zu construiren.

Auflösung.

Taf. V. Fig. 2.

Die bei Auflösung dieser Aufgabe zu erfüllenden Bedingungen sind:

a) Eine Seite des verlangten Dreiecks muß einer gegebenen Linie A B gleich seyn.

b) Der ihr gegenüberliegende Eckpunkt des Dreiecks muß von ihr eine Entfernung gleich der gegebenen Höhe haben.

c) Das Rechteck, welches aus den beiden andern Seiten des Dreiecks gebildet werden kann, muß einem gegebenen Rechteck E F G H an Inhalt gleich seyn.

Daher ziehe man

1) zur Erfüllung der Bedingung a eine gerade Linie A B gleich der gegebenen Grundlinie.

2.

2) In einer Entfernung von ihr gleich der gegebenen Höhe ziehe man eine Parallele C D mit derselben; so liegt in dieser die Spitze des gesuchten Dreiecks, und entspricht somit der Bedingung b.

3) Man ziehe aus dem einen Endpunkt A der Grundlinie A B an die Linie C D gerade Linien A I.

4) Aus dem andern Endpunkt B der Grundlinie ziehe man gerade Linien B K durch die Punkte I.

5) Zu jeder der Linien A I als erstem Glied und den Seiten E F und G H als zweitem und drittem Glied suche man die vierte geometrische Proportionale, und trage sie

6) von B aus auf die correspondirende der Linie B K.

7) Man vereinige die dadurch erhaltenen Punkte L der Reihe nach durch eine stetige krumme Linie.

8) Vom Punkt S, wo sie die Linie C D schneidet, ziehe man nach A und B gerade Linien, so ist A B S das verlangte Dreieck.

Aufgabe. 9.

Taf. V. Fig. 3.

Durch einen gegebenen Punkt D eine gerade Linie zu ziehen, so daß sie von einem gegebenen Winkel A B C, in dessen Schenkel D nicht liegt, ein Dreieck von gegebenem Inhalt I K L M abschneidet.

Auflösung.

Die Bedingungen, welchen das Dreieck entsprechen muß, sind folgende:

a) Ein Winkel des Dreiecks muß gleich dem gegebenen Winkel seyn.

b) Die Seite (oder ihre Verlängerung), welche diesem Winkel gegenüber liegt, muß durch den gegebenen Punkt D gehen.

c) Das Dreieck dem gegebenen Rechteck I K M L an Inhalt gleich seyn.

1) Man zeichne daher den gegebenen Winkel A B C mit dem Punkt D.

2) Durch den Punkt D ziehe man gerade Linien E′ E, welche die Schenkel des Winkels A B C treffen, so erhält man Dreiecke E′ B E, welche den Bedingungen a und b entsprechen.

3) Die im Schenkel B C liegenden Seiten B E betrachte man als Grundlinien und ziehe die Höhenlinien E′ F dieser Dreiecke.

4) Für jedes der Dreiecke suche man zur halben Grundlinie als erstem Glied, und zu den Seiten L M und L I des gegebenen Rechtecks als zweitem und drittem Glied die vierte geometrische Proportionale, und trage sie von der Grundlinie aus auf die Höhe des correspondirenden Dreiecks. Die so erhaltenen Punkte G stetig auf einander folgend gedacht, sind der geometrische Ort für die Scheitel der Dreiecke, die die Grundlinie B E haben und der Bedingung c entsprechen.

5) Man vereinige gedachte Punkte G der Reihe nach durch eine stetige krumme Linie mit einander, so wird ihr Durchschnittspunkt S mit dem Schenkel A B der Scheitel des verlangten Dreiecks seyn.

6) Man ziehe daher von S durch D bis an den Schenkel A C die gerade Linie S H, so erhält man das verlangte Dreieck B H S.

Anmerkung. Läge der Punkt D in einem der Schenkel des Winkels, so wäre die Aufgabe leicht rein geometrisch zu lösen, indem D in E′ fällt und E′ B unveränderlich wird.

Aufgabe 10.

Taf. V. Fig. 4.

Es ist ein Winkel B A C und ein Punkt D gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie ziehen, so daß der zwischen die Schenkel des Winkels fallende Theil dieser Linie gleich sey einer gegebenen Linie E F.

Auflösung.

Bei der Auflösung dieser Aufgabe ist folgenden Bedingungen zu genügen:

a) Die zu ziehende Linie muß durch den gegebenen Punkt D gehen.

b) Dasjenige Stück derselben, welches zwischen beiden Schenkeln des gegebenen Winkels liegt, muß der gegebenen Linie E F gleich seyn.

1) Man zeichne den gegebenen Winkel B A C mit dem Punkt D in der erforderlichen Lage.

2) Durch den Punkt D ziehe man vom Schenkel A B aus, gerade Linien G H gegen den Schenkel A C.

3) Von ihren Anfangspunkten G im Schenkel A B trage man die gegebene Linie E F auf jede derselben.

4) Die dadurch erhaltenen Punkte I verbinde man mit einander durch eine stetige krumme Linie; so hat diese die Eigenschaft, daß jede von einem ihrer Punkte durch D an AB gezogene gerade Linie gleich ist der gegebenen EF.

5) Vom Punkt S, wo die krumme Linie den Schenkel A C trifft, ziehe man eine gerade Linie durch den Punkt D bis an den Schenkel A B, so ist sie die verlangte.

Aufgabe 11.

Eine Seite eines Dreiecks, der gegenüberliegende Winkel

und der Radius des eingeschriebenen Kreises sind gegeben. Man soll das Dreieck construiren.

Auflösung.
Taf. VI. Fig. 1.

Bei der Auflösung dieser Aufgabe ist folgenden Forderungen zu genügen:

a) Einer von den Winkeln des zu zeichnenden Dreiecks muß dem gegebenen Winkel gleich seyn.

b) Die Seite, welche diesem Winkel gegenüber liegt, muß der gegebenen Seite A B gleich seyn.

c) Die drei Seiten des Dreiecks müssen einen Kreis berühren, dessen Radius der gegebenen Linie P Q gleich ist.

1) Um der Bedingung a zu genügen, zeichne man einen Winkel C D E gleich dem gegebenen.

2) In denselben zeichne man einen Kreis, dessen Radius gleich dem gegebenen P Q ist, so daß er beide Schenkel des Winkels berührt.

3) Von dem einen Schenkel D E ziehe man Tangenten H F an den Kreis, so daß sie den andern Schenkel D C in den Punkten I schneiden, so erhält man Dreiecke D H I, welche den Bedingungen a und c entsprechen.

4) Von den Punkten H aus trage man auf jede der Linien H F gegen den Schenkel C D hin die gegebene Seite A B des verlangten Dreiecks.

5) Die dadurch bestimmten Punkte K vereinige man mit einander durch eine stetige krumme Linie, so hat jeder Punkt derselben die Eigenschaft, daß wenn man von ihm aus eine Tangente an den Kreis bis an den Schenkel D E zieht, sie gleich ist der gegebenen Seite des Dreiecks.

6) Durch die Punkte L, wo sie den Schenkel C D schneidet, ziehe man Tangenten an den Kreis, so bilden

sie mit den Schenkeln des Winkels C D E zwei Dreiecke D L S, wovon jedes allen Forderungen entspricht.

Anmerkung I. In der Figur ist auch die krumme Linie gezeichnet, welche man erhält, wenn man die Auflösung wiederholt, und dabei die Schenkel des Winkels C D E verwechselt. Ihre Durchschnittspunkte S mit dem Schenkel C E müssen die nämlichen Dreiecke wie früher bestimmen, somit die Richtigkeit der frühern Curve controlliren.

Anmerkung II. Wenn man die krumme Linie fortsetzt, daß man ihre verschiedenen Aeste erhält, so löst sie auch die Aufgabe: Das Dreieck zu zeichnen, wenn der Kreis nicht der eingeschriebene ist, sondern wenn er die gegebene Seite und die Verlängerungen der beiden übrigen Seiten berührt.

Andere Auflösung.
Taf. VI. Fig. 2.

1) Man ziehe eine gerade Linie A C gleich der gegebenen Seite des Dreiecks.

2) Über dieselbe als Sehne beschreibe man einen Kreisbogen A L C, welcher den gegebenen Winkel faßt.

3) Parallel mit A C ziehe man eine gerade Linie G H, in einer Entfernung von ihr gleich dem gegebenen Radius, so muß in ihr der Mittelpunkt des in das verlangte Dreieck eingeschriebenen Kreises liegen.

4) Von beliebigen Punkten L des Kreisbogens A L C ziehe man gerade Linien nach A und C, so erhält man Dreiecke, die den Bedingungen a und b entsprechen.

5) Die Winkel dieser Dreiecke bei A und C halbire man, und vereinige

6) die Durchschnittspunkte M der correspondirenden dieser Halbirungslinie, durch eine stetige krumme Linie, so enthält sie die Mittelpunkte der in die Dreiecke A L C eingeschriebenen Kreise. Ihr Durchschnittspunkt S mit der

Linie G H wird also der Mittelpunkt des in das verlangte Dreieck eingeschriebenen Kreises seyn.

7) Von S aus als Mittelpunkt mit einem Radius gleich dem gegebenen beschreibe man einen Kreis.

8) Von A aus ziehe man eine Tangente A B an diesen Kreis bis zum Kreisbogen A L C.

9) Von B aus nach C ziehe man eine gerade Linie, so ist A B C das verlangte Dreieck.

Diese Auflösung hat auf eine reine Auflösung geführt durch die Betrachtung, daß der Winkel L bei allen Dreiecken A L C derselbe ist, also die Summe der beiden andern Winkel jedes dieser Dreiecke ebenfalls bei allen Dreiecken dieselbe ist, mithin die Summe der Winkel bei A und C jedes der Dreiecke A C M, als die Hälfte jener ersten Summe dieselbe bleibt, folglich der Winkel M bei allen Dreiecken A C M derselbe und die krumme Linie voriger Auflösung ein Kreisbogen ist, welcher durch die Endpunkte der Sehne A C geht und einen Winkel faßt der sich aus dem gegebenen finden läßt. Er muß nämlich, weil die Summe der drei Winkel eines Dreiecks immer dieselbe ist, um so viel größer seyn wie der gegebene, als die Summe der Winkel M A C und M C A kleiner ist, wie die Summe der Winkel L A C und L C A. Wenn man also zum Winkel L die halbe Summe der Winkel L A C und L C A oder den halben Nebenwinkel des gegebenen addirt, so erhält man den Winkel M. Wenn man aber zu einem gegebenen Winkel die Hälfte seines Nebenwinkels addirt, so erhält man einen Winkel, der gleich ist einem rechten Winkel mehr der Hälfte des gegebenen. Der Winkel, den der Kreisbogen A M C faßt, ist also gleich einem rechten mehr der Hälfte des gegebenen Winkels, folglich der correspondirende Mittelpunktswinkel gleich zwei rechten weniger dem gegebenen.

Es sei N P der Durchmesser des Kreises A L C, welcher die Sehne A C halbirt, so liegt in ihm das Centrum des Bogens A M C. Man ziehe die Sehnen A P und C P, so ist Winkel C A P gleich dem Winkel A C P, gleich der Hälfte des gegebenen, mithin A P C gleich zwei rechten weniger den gegebenen, also A P C gleich dem Mittelpunktswinkel zum Bogen A M C und folglich P das Centrum dieses Kreisbogens.

Hierauf beruht folgende reine Construction:

Taf. VI. Fig. 3.

1) Man ziehe eine gerade Linie A C gleich der gegebenen Seite des Dreiecks.

2) Durch die Endpunkte dieser Linie als Sehne ziehe man einen Kreis A B C P, dessen Bogen A B C den gegebenen Winkel faßt.

3) Man zeichne einen Kreis A F C H, dessen Centrum P mit dem Mittelpunkt des Bogens A P C zusammenfällt, und welcher durch die Endpunkte der Linie A C geht.

4) Parallel mit A C auf der Seite derselben, wo der Bogen A B C liegt, ziehe man eine gerade Linie D E, so daß ihr Abstand von A C gleich dem gegebenen Radius ist.

5) Aus dem Durchschnittspunkt F dieser Linie und des Kreises A F C H als Centrum mit einem Radius gleich dem gegebenen beschreibe man einen Kreis.

6) Von A und C aus ziehe man Tangenten A B und A C an diesen Kreis, so erhält man das verlangte Dreieck.

Aufgabe 12.

Das Produkt zweier Linien gleich einem gegebenen Rechteck und die Differenz ihrer Quadrate gleich einem gegebenen Quadrat ist bekannt. Man soll beide Linien bestimmen.

Auflösung.
Taf. VI. Fig. 4.

1) Man zeichne ein Rechteck **A B C D** gleich dem gegebenen.

2) Von einem seiner Ecken **A** als Mittelpunkt ziehe man einen Kreis mit einem Radius gleich der Seite des gegebenen Quadrats.

3) Diejenige Seite **A B** des Rechtecks, in deren Endpunkt das Centrum obigen Kreises liegt, verlängere man gegen **E**.

4) Auf dieser Verlängerung schneide man vom Mittelpunkt **A** des Kreises aus willkührliche Stücke **A F** ab, und beschreibe über dieselben als Durchmesser, Kreise.

5) Zu den Durchmessern **A F** dieser Kreise und den Seiten **A C** und **A B** des gegebenen Rechtecks suche man die vierten geometrischen Proportionalen.

6) Bestimme auf den in Nr. 4 gezogenen Kreisen Punkte **G**, deren Entfernungen von den Endpunkten **F** der correspondirenden Durchmesser den vorhin erhaltenen vierten Proportionalen gleich sind.

7) Diese Punkte **G** verbinde man mit einander durch eine stetige krumme Linie.

8) Vom Punkte **S**, wo sie den in Nr. 2 gezogenen Kreis schneidet, ziehe man nach **A** eine gerade Linie.

9) Auf diese errichte man aus **S** eine rechtwinklichte gerade Linie **S T** bis an **A E**, so sind **S T** und **T A** die verlangten Linien.

Andere Auflösung.
Taf. VII. Fig. 1.

1) Man ziehe einen beliebigen Kreis von hinreichender Größe.

2) An irgend einem Punkt A in seiner Peripherie ziehe man eine Tangente A B und mache sie gleich der Seite eines Quadrats, dessen Inhalt gleich dem gegebenen Rechteck aus den zu suchenden Linien ist.

3) Aus B ziehe man beliebige Kreissecanten B C.

4) Über die Entfernungen des Punkts B von den von B am entferntesten liegenden Durchschnittspunkten C dieser Secanten mit dem Kreis beschreibe man Halbkreise.

5) Auf diesen Halbkreisen bestimme man Punkte D, deren Entfernung von den Punkten C gleich ist der Seite des gegebenen Quadrats, welches der Differenz der Quadrate der zu suchenden Linien gleich ist.

6) Die Entfernungen dieser Punkte D vom Punkt B trage man von B aus auf die correspondirenden Secanten.

7) Die so erhaltenen Punkte F verbinde man mit einander durch eine stetige krumme Linie.

8) Durch den Punkt S, wo sie den Kreis schneidet, ziehe man von B aus eine gerade Linie, so sind die Entfernungen der Punkte S und R, in welchen sie den Kreis schneidet, vom Punkt B die verlangten Linien.

Dritte Auflösung.

Taf. VII. Fig. 2.

1) Man zeichne einen rechten Winkel B A M und mache den einen Schenkel A B gleich der Seite des gegebenen Quadrats, welches gleich ist der Differenz der Quadrate der gesuchten Linien.

2) Von B aus ziehe man an den Schenkel A M gerade Linien B G, B F ꝛc. beliebig.

3) Die Längen dieser Linien trage man von den Punkten G, F u. s. w. aus auf den Schenkel A M gegen M nach G L, F O u. s. w.

4) Über die Entfernungen der erhaltenen Punkte von A als Durchmesser ziehe man Halbkreise.

5) Von den Punkten F, G ꝛc. errichte man rechtwinklicht auf A M gerade Linien.

6) Die Punkte H, I ꝛc., wo sie die correspondirenden Halbkreise schneiden, verbinde man durch ein stetige krumme Linie.

7) Parallel mit A M ziehe man eine gerade Linie M′N, deren Entfernung von ihr gleich der Seite des Quadrats ist, das an Inhalt gleich ist dem Rechteck der zu suchenden Linien.

8) Vom Punkt E, wo sie die krumme Linie schneidet, fälle man den Perpendikel E P auf A M.

9) Von P aus ziehe man die gerade Linie P B, so sind P B und P A die verlangten Linien.

Aufgabe 13.

Zwei gegebene concentrische Kreise durch eine gerade Linie so zu schneiden, daß die dadurch erhaltenen Kreissehnen ein gegebenes Verhältniß haben.

Auflösung.
Taf. VII. Fig. 3.

1) Man ziehe parallele Linien A B, welche beide Kreise schneiden.

2) Zu den Hälften C D der so erhaltenen Sehnen des einen Kreises suche man Linien, die zu ihnen das gegebene Verhältniß haben.

3) Diese trage man von den Mittelpunkten C der correspondirenden Sehnen aus auf die Secanten in C E.

4) Man vereinige die dadurch erhaltenen Punkte E

durch eine stetige krumme Linie mit einander, so wird dieselbe den zweiten Kreis in demjenigen Punkt S schneiden, durch den man nur eine gerade Linie parallel mit A B zu ziehen braucht, um die verlangte Linie zu erhalten.

Die in Nr. 3 bestimmten Ordinaten der krummen Linie haben zu den correspondirenden Ordinaten oder halben Sehnen des ersten Kreises alle dasselbe Verhältniß; es findet also die Proportion Statt:

Größte Ordinate des Kreises zur größten Ordinate der krummen Linie, wie irgend eine andere Ordinate des ersten zu der correspondirenden Ordinate der krummen Linie.

Oder auch

kleine Axe zur großen Axe der krummen Linie wie irgend eine Kreisordinate zur Ordinate der krummen Linie.

Die krumme Linie ist also eine Ellypse und es ergibt sich folgende reine geometrische Auflösung dieser Aufgabe.

Taf. VII. Fig. 4.

1) Man ziehe einen beliebigen Radius O C des innern Kreises, und bestimme auf seiner Verlängerung einen Punkt F so, daß F O und C O das gegebene Verhältniß zu einander haben.

2) Beschreibe über C F einen Halbkreis.

3) Durch den Punkt A, wo derselbe den äußern Kreis schneidet, und durch C ziehe man eine gerade Linie, so ist sie die verlangte.

Aufgabe 14.

Die Größe zweier vom nämlichen Punkt der Peripherie eines Kreises gezogenen Sehnen, und das Verhältniß der durch dieselben abgeschnittenen Kreisbogen ist gegeben. Man soll den Kreis construiren.

Auflösung.

Taf. VIII. Fig. 1.

1) Man zeichne eine gerade Linie A B gleich einer der gegebenen Sehnen.

2) Vom Endpunkt A aus als Mittelpunkt mit einem Radius gleich der zweiten der gegebenen Sehnen ziehe man einen Kreis.

3) Man ziehe eine Anzahl Kreise von beliebigem Radius durch die Punkte A und B.

4) Auf jedem dieser Kreise trage man von dem Punkt A aus einen Bogen A B C D ab, welcher zu dem durch die Sehne A B abgeschnittenen Bogen das gegebene Verhältniß hat.

5) Die Endpunkte D dieser Bogen verbinde man durch eine stetige krumme Linie.

6) Durch den Durchschnittspunkt S dieser krummen Linie mit dem in Nr. 2 gezogenen Kreis, und durch die Punkte A und B ziehe man einen Kreis, so ist er der verlangte.

Zweite Auflösung.

Taf. VIII. Fig. 2.

1) Man ziehe zwei gerade Linien A B und C D rechtwinklicht auf einander.

2) Man ziehe eine beliebige Anzahl Kreise die die Linie C D alle in A berühren, deren Mittelpunkte also sämmtlich in der Linie A B liegen.

3) Man ziehe von A aus als Mittelpunkt mit einem Radius gleich einer der gegebenen Sehnen einen Kreis G H I.

4) Von A aus schneide man von den in Nr. 2 ge-

zogenen Kreisen Bogen A E ab, die zu den von dem in Nr. 3 abgeschnitteuen Bogen A F das gegebene Verhältniß haben.

5) Die so erhaltenen Punkte E vereinige man durch eine stetige krumme Linie.

6) Von A aus als Mittelpunkt mit einem Radius gleich der zweiten der gegebenen Sehnen ziehe man einen Kreis L M N.

7) Durch den Punkt S, wo er die krumme Linie schneidet, ziehe man einen Kreis, der die Linie C D in A berührt, so ist er der verlangte.

Diese beiden Auflösungen lassen sich nur bequem anwenden, wenn das Verhältniß der Bogen so ist, daß die vorkommende Bogentheilung sich leicht vornehmen läßt; also wenn ein Verhältnißglied gleich Eins, das andere irgend eine ganze Zahl ist, oder wenn das erste Glied gleich Zwei, oder Vier ꝛc. ist; folgende Auflösung ist leicht anzuwenden, wenn die Verhältnißglieder sonstige Zahlen sind.

Dritte Auflösung.
Taf. VIII. Fig. 3.

1) Man ziehe zwei gerade Linien A B und C D rechtwinklicht auf einander.

2) Vom Punkt A aus als Centrum mit beliebigem Radius ziehe man einen Kreisbogen E P.

3) Vom Punkt E aus, wo derselbe die Linie A C trifft schlage man mit einer beliebigen Sehne so viel gleiche Bogen auf demselben ab, daß man zwei Kreisbogen E F und E G erhält, die das gegebene Verhältniß zu einander haben.

4) Von A aus ziehe man gerade Linien A H und A I

durch die Endpunkte F und G dieser Bogen, und mache sie gleich den gegebenen Sehnen.

5) Auf dieselben ziehe man von ihren Endpunkten H und I aus rechtwinklichte Linien, bis sie sich in L schneiden. Läge der Punkt L in der Linie A B, so wäre der über seine Entfernungslinie von A als Durchmesser beschriebene Kreis der verlangte, denn er ginge durch die Punkte H und I, die Linien A H und A I wären also Sehnen von ihm; die Linie A C wäre Tangente, also verhielten sich die Tangentenwinkel C A H und C A I wie die von den Sehnen A H und A I abgeschnittenen Bogen, da aber vermöge Nr. 3 diese Winkel das gegebene Verhältniß haben, so hätten die Bogen auch das richtige Verhältniß.

6) Man bestimme deßwegen auf gleiche Art eine hinlängliche Anzahl Punkte wie L, vereinige sie durch eine stetige krumme Linie.

7) Ueber die Entfernungslinie des Punkts A vom Punkt S, wo die krumme Linie die Linie A B schneidet, als Durchmesser beschreibe man einen Kreis, so ist er der verlangte.

Aufgabe 15.

In einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Vieleck von einer gegebenen Anzahl Seiten einzuschreiben.

Auflösung.

Taf. VIII. Fig. 4.

1) Von irgend einem Punkt A des gegebenen Kreises ziehe man Sehnen A B von willkührlicher Richtung auf dieselbe Seite.

2) Diese Sehnen trage man von A aus, einmal weniger,

als das Vieleck Seiten haben soll, auf die Peripherie des Kreises in B, C, D ꝛc.

3) Von A aus ziehe man durch die dadurch erhaltenen letzten Theilungspunkte E gerade Linien A F.

4) Von A aus trage man auf dieselben in A G die correspondirenden der Sehnen A B.

5) Die dadurch erhaltenen Punkte G vereinige man durch eine stetige krumme Linie, so wird diese den Kreis in demjenigen Punkt S schneiden, dessen Entfernungslinie A S vom Punkt A die Seite des verlangten Vielecks ist.

Die Auflösung kann auch zur umgekehrten Aufgabe, d. h. wenn die Seite eines Vielecks gegeben ist, benützt werden: denn hat man auf beschriebene Art ein Vieleck von der verlangten Anzahl Seiten in irgend einen beliebigen Kreis gezeichnet, so hat man ein ähnliches Vieleck, woraus durch Verkürzung oder Verlängerung der Seiten das gesuchte von gegebener Seitenlänge leicht gefunden wird.

Aufgabe 16.

Taf. IX. Fig. 2.

Ein Kreis und zwei Punkte A und B sind gegeben; man soll in der Peripherie des Kreises einen Punkt finden, daß die Differenz seiner Entfernungen von den Punkten A und B einer gegebenen Linie G C gleich sey.

Auflösung.

1) Vom gegebenen Punkte A aus ziehe man gerade Linien A E, welche den Kreis in den Punkten D schneiden.

2) Vom zweiten gegebenen Punkt B aus, ziehe man gerade Linien an die Punkte D.

3) Die Unterschiede, die übrig bleiben, wenn man die

gegebene Linie **G C** von den Linien **B D** abschneidet, trage man von **A** aus auf die correspondirenden der Linien **A E**.

4) Die dadurch erhaltenen Punkte **F** verbinde man mit einander durch eine stetige krumme Linie, so wird sie den Kreis im verlangten Punkt **S** schneiden.

Andere Auflösung.
Taf. IX. Fig. 2.

Nr. 1 und 2 wie in voriger Auflösung.

3) Vom Punkt **A** aus als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis mit einem Radius gleich der gegebenen Linie **G C** Fig. 1.

4) Von den Punkten **D** aus gegen **A** hin schlage man die Linien **B D** auf die correspondirende der Linien **D A** oder ihre Verlängerungen ab.

5) Verbinde die hiedurch erhaltenen Punkte **F** durch eine stetige krumme Linie.

6) Vom Punkt **S**, wo sie den in Nr. 3 gezogenen Kreis schneidet, ziehe man durch **A** eine gerade Linie bis an den gegebenen Kreis, so erhält man den verlangten Punkt auf seiner Peripherie.

Eine dritte Auflösung gibt die Construction derjenigen krummen Linie, wovon jeder Punkt von **A** und **B** um die gegebene Differenz verschieden entfernt ist, welche Curve eine Hyperbel ist, deren Brennpunkte die Punkte **A** und **B** sind und deren erste Axe gleich ist der gegebenen Differenz.

Aufgabe 17.
Taf. IX. Fig. 3.

Ein Kreis und zwei Punkte **A** und **B** sind gegeben, man soll in der Peripherie des Kreises einen Punkt so be=

stimmen, daß die Summe der Quadrate seiner Entfernungslinien von den Punkten A und B gleich sey dem Quadrat einer gegebenen Linie C D.

Auflösung.

1) Von einem der gegebenen Punkte z. B. A, ziehe man gerade Linien A E an den Kreis.

2) Von dem zweiten gegebenen Punkt B aus ziehe man durch ihre Endpunkte E gerade Linien B F und trage auf sie von B aus den einen Katheten eines rechtwinklichten Dreiecks, dessen anderer Kathet gleich ist der correspondirenden von den Linien A E und dessen Hypothenuse gleich C D ist.

3) Die dadurch erhaltenen Punkte G vereinige man durch eine stetige krumme Linie, so wird diese den Kreis in dem verlangten Punkt S schneiden.

Andere Auflösung.
Tab. IX. Fig. 4.

1) Von A aus durch B ziehe man eine gerade Linie A M und mache sie gleich der Linie C D Fig. 3.

2) Über A M beschreibe man einen Halbkreis.

3) Von A aus als Mittelpunkt beschreibe man Kreise von willkührlichen Halbmessern.

4) Von B aus als Mittelpunkt durchschneide man sie durch Kreisbogen, deren Radien gleich sind den Entfernungen des Punktes M von ihren correspondirenden Durchschnittspunkten F mit dem Halbkreis.

5) Die so erhaltenen Punkte G verbinde man mit einander durch eine stetige krumme Linie, so schneidet sie den gegebenen Kreis im verlangten Punkt S.

Aufgabe 18.

Von einem rechtwinklichten Dreieck kennt man das Produkt der Katheten gleich einem gegebenen Rechteck und die aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällte rechtwinklichte Linie gleich einer gegebenen Linie.

Man soll das Dreieck construiren.

Auflösung.

Taf. X. Fig. 1.

1) Man zeichne einen rechten Winkel **A C B.**

2) Aus seinem Scheitel **C** als Mittelpunkt und mit einem Radius gleich dem gegebenen Perpendikel beschreibe man einen Kreis.

3) Vom Scheitel **C** des rechten Winkels aus trage man auf dessen zwei Schenkel je zwei Linien **C K** und **C L**, deren Produkte gleich sind dem gegebenen Rechteck **D E F G**, und verbinde

4) die Endpunkte **K** und **L** der correspondirenden dieser Linien durch gerade Linien **K L.**

5) Vom Scheitel des rechten Winkels fälle man auf jede dieser Linien einen Perpendikel **C M.**

6) Die Endpunkte **M** dieser Perpendikel verbinde man durch eine stetige krumme Linie mit einander.

7) Durch den Durchschnittspunkt **S** dieser krummen Linie mit dem Kreis, ziehe man eine Tangente **U T** an den Kreis, so bildet diese mit den Schenkeln des rechten Winkels das verlangte Dreieck.

Aufgabe 19.

Durch den Scheitel eines gegebenen Winkels, dessen Schenkel gegebenen Linien gleich sind, eine gerade Linie so

zu ziehen, daß wenn man von den Endpunkten der Schenkel auf dieselbe rechtwinklichte gerade Linien zieht, die dadurch entstandenen rechtwinklichten Dreiecke an Inhalt einander gleich sind.

Auflösung.

Taf. X. Fig. 2.

1) Man zeichne einen Winkel gleich dem gegebenen und mache seine Schenkel C A und C B den gegebenen Linien gleich.

2) Ueber jeden dieser Schenkel als Durchmesser beschreibe man einen Kreis.

3) Von A aus ziehe man an die Peripherie des über C A beschriebenen Kreises gerade Linien A D.

4) Durch die Endpunkte D derselben ziehe man vom Scheitel C aus gerade Linien C E bis an den über C B beschriebenen Kreis.

5) Durch die Endpunkte E dieser Linien ziehe man gerade Linien F B nach B.

6) Von B aus trage man auf diese in B G die vierten Proportionalen zu den Linien C E, C D und D A.

7) Die dadurch erhaltenen Punkte G vereinige man mit einander durch eine stetige krumme Linie.

8) Durch den Durchschnittspunkt S derselben und des über C B beschriebenen Kreises, ziehe man vom Scheitel C aus eine Linie C F, so ist diese die verlangte.

Anmerkung. Diese Auflösung löst zugleich die Aufgabe: aus der gegebenen Lage und Größe zweier zugeordneter Durchmesser einer Ellypse oder Hyperbel die Lage der Axen derselben zu finden.

Beispiele über diejenigen Fälle, wo der gesuchte Punkt im Durchschnitt zweier krummen Linien liegt.

Aufgabe 20.

Man kennt die Länge zweier sich rechtwinklicht schneidender Sehnen eines Kreises und die Entfernung ihres Durchschnittspunkts vom Mittelpunkt des letztern. Man soll den Kreis zeichnen.

Auflösung.

Taf. X. Fig. 3.

1) Man ziehe eine gerade Linie A B gleich einer der gegebenen Sehnen.

2) Durch den Mittelpunkt derselben ziehe man eine rechtwinklichte Linie C D auf sie.

3) Aus beliebigen Punkten E derselben auf einer Seite der Linie A B als Mittelpunkte beschreibe man Kreise, welche sämmtlich durch die Endpunkte A und B der letztern gehen.

4) Von denselben Mittelpunkten E aus durchschneide man die Linie A B durch Kreisbogen mit einem Radius, gleich der gegebenen Entfernung des Durchschnittspunkts der Sehnen vom Centrum.

5) Durch diese Durchschnittspunkte F ziehe man gerade Linien G H rechtwinklicht auf die Sehne A B.

6) Die auf einer Seite der Sehne A B liegenden Durchschnittspunkte I dieser rechtwinklichten Linien und der correspondirenden Kreise verbinde man mit einander durch eine stetige krumme Linie.

7) Von den auf der andern Seite von A B liegenden

Durchschnittspunkten K der nämlichen rechtwinklichten Linien und Kreise trage man die zweite gegebene Sehne M R auf jede der Linien G H gegen die Sehne A B hin in K L.

8) Die dadurch erhaltenen Punkte L verbinde man mit einander durch eine stetige krumme Linie.

9) Durch den Punkt S, wo die beiden krummen Linien sich schneiden, und durch die Punkte A und B beschreibe man einen Kreis, so ist er der verlangte.

Andere Auflösung.
Taf. X. Fig. 4.

1) Man ziehe eine gerade Linie A B gleich der gegebenen Sehnen.

2) Rechtwinklicht auf sie und durch ihren Mittelpunkt D ziehe man eine gerade Linie F E.

3) In beliebigen Punkten C der Linie A B setze man ein und durchschneide die Linie F E durch Kreisbogen, deren Radius gleich ist der gegebenen Entfernung des Durchschnittspunkts der Sehnen vom Centrum des Kreises.

4) Durch die Punkte C ziehe man Parallele G H mit E F.

5) Von den in Nr. 3 bestimmten Durchschnittspunkten I ziehe man Perpendikel I L auf die Linien G H.

6) Von ihren Endpunkten L aus trage man die Hälfte der zweiten von den gegebenen Sehnen auf die Linien H G in L K.

7) Die so erhaltenen Punkte verbinde man mit einander durch eine stetige krumme Linie.

8) Auf den Linien G H bestimme man Punkte P, deren Entfernungen von den correspondirenden Punkten I gleich sind den Entfernungen der Punkte I vom Punkt A oder B.

9) Diese Punkte P vereinige man durch eine stetige krumme Linie.

10) Durch den Punkt S, wo sie die vorige krumme Linie schneidet, und durch die Punkte A und B ziehe man einen Kreis, so ist er der verlangte.

Aufgabe 21.

Die Länge der Tangente eines Kreises, vom Berührungspunkt an gerechnet, und das Produkt aus den Entfernungen des Endpunktes der Tangente vom Mittelpunkt und von der Kreisperipherie, gleich einem gegebenen Rechteck, sind gegeben, man soll den Kreis construiren.

Auflösung.

Taf. XI. Fig. 1.

1) Man ziehe eine gerade Linie A B gleich der gegebenen Tangente.

2) Von einem Endpunkt B derselben errichte man auf sie eine rechtwinklichte gerade Linie B G.

3) Durch den Punkt B ziehe man Kreise, deren Mittelpunkte H sämmtlich in B G liegen.

4) Die Mittelpunkte H dieser Kreise verbinde man mit dem andern Endpunkt A der Linie A B durch gerade Linien.

5) Ihre Durchschnittspunkte I mit den correspondirenden Kreisperipherien vereinige man mit einander durch eine stetige krumme Linie.

6) Zu den Radien H I der Kreise als ersten Gliedern und den Seiten E F und E D des gegebenen Rechtecks, als zweiten und dritten suche man die vierten geometrischen Proportionalen und trage sie

7) von A aus auf die correspondirenden der Linien A H und A K.

8) Die dadurch erhaltenen Punkte K verbinde man mit einander durch eine stetige krumme Linie.

9) Durch den Durchschnittspunkt S dieser krummen Linie, mit der in Nr. 5 entstandenen krummen Linie, ziehe man von A aus eine gerade Linie, bis an B G, so ist ihr Endpunkt L der Mittelpunkt und die Linie L B der Radius des verlangten Kreises.

Aufgabe 22.

Ein Beobachter befindet sich in einer gewissen Höhe über einer Horizontalebene. Er mißt die Winkel, welche die Gesichtsstrahlen mit einander bilden, die nach drei in genannter Horizontalebene liegenden Punkten gezogen sind. Die Lage dieser drei Punkte ist auf einer Karte gegeben, man soll den vierten Punkt, nämlich den Ort des Beobachters ebenfalls in die Karte eintragen.

Auflösung.

Taf. **XI.** Fig. 2.

Bei näherer Betrachtung dieser Aufgabe sieht man alsbald, daß sie sich folgendermaßen stellen läßt:

Von einer dreiseitigen Pyramide sind gegeben die Grundfläche und die drei Linienwinkel des gegenüberliegenden Ecks; man soll den Fußpunkt ihrer Höhenlinie suchen.

Um diese schöne praktische, durch Monge so berühmt gewordene Aufgabe aufzulösen, zeichne man:

1) ein Dreieck A B C gleich der gegebenen Grundfläche.

2) Über jede seiner Seiten beschreibe man einen Kreis der den gegenüberliegenden Linienwinkel faßt.

3) Von willkührlichen Punkten A′ des einen Kreises fälle man Perpendikel auf die Seite A B.

4) Auf dem zweiten Kreis bestimme man Punkte E, so daß die Entfernungen derselben von B gleich werden den Entfernungen der Punkte A′ von B.

5) Von den Punkten E lasse man Perpendikel auf B C fallen.

6) Die Punkte G, wo sie die correspondirenden der auf A B gefällten Perpendikel schneiden, verbinde man durch eine stetige krumme Linie.

7) Auf den dritten Kreisbogen bestimme man Punkte F, deren Enfernungen von C gleich sind den Entfernungen der Punkte E von C.

8) Von den Punkten F fälle man Perpendikel auf die Seite A C.

9) Die Punkte H, wo diese Perpendikel die auf B C gefällten Perpendikel schneiden, verbinde man durch eine stetige krumme Linie mit einander. Ihr Durchschnittspunkt S mit der in Nr. 6 gezogenen krummen Linie ist der verlangte Punkt.

Andere Auflösung.

Taf. XI. Fig. 3.

Nr. 1 und 2 wie in voriger Auflösung.

3) Auf einem der Kreisbogen nehme man beliebige Punkte D an und ziehe nach B gerade Linien.

4) Auf dem zweiten Kreisbogen bestimme man Punkte G, deren Entfernungen B G von B gleich sind den Linien D B, und ziehe von ihnen gerade Linien nach A.

5) Auf dem dritten Kreisbogen bestimme man Punkte H, deren Entfernungen von A gleich sind den Linien A G, und ziehe von ihnen gerade Linien nach C.

6) Von C aus ziehe man gerade Linien durch die Punkte D und trage auf ihnen von C aus die correspondirenden der Linien C H ab.

7) Die so erhaltenen Punkte E verbinde man mit einander durch eine stetige krumme Linie.

8) Vom Durchschnittspunkt S derselben, mit dem Kreisbogen B S C, ziehe man nach B eine gerade Linie.

9) Auf dem Bogen B G A bestimme man den Punkt T so, daß T B gleich B S wird, und ziehe T A.

10) Auf dem Bogen A H C bestimme man den Punkt U so, daß U A gleich A T wird.

11) Von den Punkten S, T und U lasse man Perpendikel auf die Seiten des Dreiecks A B C fallen, so müssen sie sich im verlangten Punkt W schneiden.

Beispiele über diejenigen Fälle, wo der Punkt aus dem Durchschnittspunkt der krummen Linie und einer andern erst durch fernere Construction gefunden wird.

Aufgabe 23.

Eine gegebene gerade Linie in zwei solche Theile zu theilen, daß das Quadrat des einen Theils gleich ist dem Rechteck aus dem andern Theil in eine gegebene Linie.

Auflösung.

Taf. XI. Fig. 4.

1) Man zeichne eine gerade Linie A B gleich der zu theilenden Linie.

2) Man verlängere sie durch A bis C um die zweite gegebene Linie M C.

3) Auf die Linie A B errichte man rechtwinklichte gerade Linien F G.

4) Über die Entfernungen **F C** als Durchmesser beschreibe man Halbkreise.

5) Von **A** aus errichte man auf **B C** die rechtwinklichte gerade Linie **A E**.

6) Von den Punkten **H** aus, wo sie die Halbkreise schneidet, ziehe man nach den correspondirenden der Linien **F G** gerade Linien **H I** parallel mit **A B**.

7) Ihre Endpunkte **I** vereinige man mit einander durch eine stetige krumme Linie.

8) Von **B** aus ziehe man eine gerade Linie **B D**, welche mit **B A** einen halben rechten Winkel bildet.

9) Aus dem Punkt **S**, wo sie die krumme Linie schneidet, ziehe man auf **A B** einen Perpendikel **S T**, so ist **T** der verlangte Punkt.

Anmerkung. Schon in der Angabe der Aufgabe ist eine Eigenschaft der bei der Auflösung gezeichneten krummen Linie ausgesprochen, welche bloß der Parabel zukommt, deren Parameter gleich ist der gegebenen Linie **M C**, und wodurch sich die Augabe leicht rein geometrisch lösen läßt.

Aufgabe 24.

Ein Kreis und zwei Punkte sind gegeben, man soll in der Peripherie des Kreises einen Punkt finden, so daß die von diesem Punkt nach den gegebenen Punkten gezogenen geraden Linien gegen die Kreisperipherie gleiche Neigung haben, d. h., daß sie mit der Tangente des zu suchenden Punktes der Peripherie gleiche Winkel bilden.

Erste Auflösung.
Taf. XII. Fig. 1.

1) Von den gegebenen Punkten **A** und **B**, ziehe man an beliebige Punkte **D** der Peripherie des gegebenen Kreises gerade Linien.

2) In diesen Punkten als Mittelpunkten setze man ein, und beschreibe mit beliebigem, aber constantem Radius, Kreise.

3) Die Theile B′ C dieser Kreise, zwischen den Linien B D und dem gegebenen Kreis, trage man von den Durchschnittspunkten A′ der correspondirenden Kreise mit den Linien A D auf die Kreise in A′ C′.

4) Die so bestimmten Punkte C′ verbinde man durch eine stetige krumme Linie mit einander.

5) Im Durchschnittspunkt E dieser krummen Linie und des gegebenen Kreises setze man ein, und beschreibe einen Kreisbogen mit einem Radius, gleich dem in Nr. 2 angenommenen, so schneidet er den gegebenen Kreis im verlangten Punkt G.

Andere Auflösung.

Taf. XII. Fig. 2.

1) Von den gegebenen Punkten A und B aus, ziehe man durch beliebige Punkte D des gegebenen Kreises Kreissecanten B H′ und A G′.

2) Die so erhaltenen Sehnen D G′ trage man von den Punkten D aus auf die Secanten B H′ in D H′.

3) Die so erhaltenen Punkte H′, vereinige man durch eine stetige krumme Linie.

4) Vom Punkt H, wo sie den gegebenen Kreis schneidet, ziehe man eine gerade Linie nach B, so ist ihr zweiter Durchschnittspunkt R mit diesem Kreis der verlangte Punkt; denn zieht man von A durch R die Kreissecante A G, so ist wegen der Natur der construirten krummen Linie, die Sehne R G gleich der Sehne H R, die Linien H B und G H bilden also gleiche Winkel mit dem Radius des Punkts R, mithin bilden sie auch gleiche Winkel mit der Tangente an den Punkt R.

Aufgabe 25.

Einen gegebenen Winkel in zwei solche Theile zu theilen, daß das Rechteck aus den Sinus derselben für einen gegebenen Radius einem gegebenen Rechteck gleich sey.

Auflösung.

Taf. XII. Fig 3.

1) Vom Scheitel C des gegebenen Winkels aus, als Mittelpunkt mit einem Radius gleich dem gegebenen beschreibe man zwischen den Schenkeln des Winkels einen Kreisbogen D E.

2) Man ziehe beliebige Radien C F dieses Kreisbogens.

3) Von den Endpunkten F dieser Radien aus ziehe man gerade Linien F G rechtwinklicht auf einen Schenkel C B.

4) Von dem Endpunkt E des Bogens lasse man gerade Linien E I rechtwinklicht auf die Radien C F fallen.

5) Zu diesen Linien E I als erstem Glied und den Seiten des Rechtecks, das gleich ist dem Produkt der Sinus, suche man die vierten Proportionalen und trage sie von den Punkten F aus auf die correspondirenden der Linien F G in F K.

6) Die dadurch erhaltenen Punkte K verbinde man mit einander durch eine stetige krumme Linie.

7) Aus dem Punkt S, wo dieselbe den Schenkel C B schneidet, errichte man auf diesen Schenkel eine rechtwinklichte gerade Linie, S T bis an den Kreisbogen.

8) Von C aus ziehe man durch T eine gerade Linie C U, so ist diese die verlangte Theilungslinie.

Aufgabe 26.

Von einem Rhombus ist gegeben ein Winkel und die Summe einer Seite und der Höhe. Man soll den Rhombus construiren.

Auflösung.

Taf. XII. Fig. 4.

1) Man zeichne einen Winkel A C B gleich dem gegebenen, und mache einen Schenkel A C desselben gleich der gegebenen Summe.

2) Von beliebigen Punkten D dieses Schenkels lasse man auf den andern Schenkel C B Perpendikel D L fallen.

3) Von den Punkten D aus auf diese Perpendikel trage man die correspondirenden Entfernungen D A in D F.

4) Die so erhaltenen Punkte F verbinde man mit einander durch eine stetige Linie.

5) Aus dem Punkt S, wo sie den Schenkel C B schneidet, errichte man auf diesen Schenkel eine rechtwinklichte Linie S G bis an den Schenkel A C, so ist C G die Seite des verlangten Rhombus.

Zieht man von A an die Punkte F gerade Linien, so sind die Dreiecke D A F gleichschenklichte Dreiecke, die den Winkel bei A gemein haben. Die Verbindungslinien A F fallen also zusammen und die in Nr. 4 gezeichnete Linie ist eine gerade.

Hieraus ergibt sich folgende reine Construction.

Taf. XII. Fig. 5.

Nr. 1 wie vorher.

2) Man errichte auf C B einen Perpendikel C H gleich der gegebenen Summe.

3) Man ziehe von A nach H eine gerade Linie.

4) wie in voriger Auflösung.

Anhang.

Taf. XIII.

Graphisches Centriren der Winkel.

Bei trigonometrischen Messungen ist man oft genöthigt, die Winkel außerhalb des Scheitels, d. h. excentrisch zu messen, und die excentrisch gemessenen Winkel auf den Scheitelpunkt (Centrum) zu reduciren, welches Verfahren man das Centriren der Winkel nennt.

Es sey Fig. 1. C das Centrum, und G C D der zu messende Winkel = C, a der Standpunkt und G a D der excentrisch gemessene Winkel = O, a C die Distanz ans Centrum (die Excentricität) = E, C G die Entfernung des Objects links = G, C D die Entfernung des Objects rechts = D, der Winkel D a C vom Object rechts ans Centrum = y, der Winkel G a C vom Object links ans Centrum = O + y, so ist die in allen Lehrbüchern der Geodäsie hergeleitete allgemeine Formel

$$C = O + \frac{E \sin (O + y)}{G} - \frac{E \sin y}{D}$$

worin alles in Decimaltheilen des Radius ausgedrückt ist; oder

$$C = O + \frac{E \sin (O + y)}{G \sin 1''} - \frac{E \sin y}{D \sin 1''}$$

worin alles in Secunden ausgedrückt ist.

Die Ausdrücke $\frac{E \sin (O + y)}{G \sin 1''}$ und $\frac{E \sin y}{D \sin 1''}$ sind die Werthe für die Winkel C G a = α und a D C = β, welche man Parallaxen nennt und die daher bei dem Centriren zuvörderst zu bestimmen sind.

Obige Formel ist in allen Fällen anwendbar, wenn auch das Centrum der Station und der Standpunkt des Instruments irgend eine der veränderten Lagen annehmen, wie sie in Fig. 2 angegeben sind. Man zählt bei dem Messen die Winkel von der linken Hand zur rechten von 0 bis zu 360 Grad fort, setzt statt y und O + y diejenigen spitzen Winkel, deren Sinus die nämlichen Zahlenwerthe haben, wie die wahren Winkel, und führt die Sinus in die Formel mit den Zeichen ein, die sie nach der wahren Größe der Winkel haben müssen. Sind die Winkel y und O + y kleiner als 180 Grad, so behält die Formel die Zeichen, ist aber einer dieser Winkel größer als 180 Grad, so ändert das entsprechende Glied der Formel das Zeichen. Hat man diese Substitution gemacht, so werden die Werthe der Glieder mit Anwendung der Sinustafeln oder Logarithmen berechnet.

Tulla's Centriren der Winkel besteht darin, die Werthe der Parallaxen ohne diese Rechnung zu bestimmen.

Man theile einen Quadranten Fig. 3 durch Radien in einzelne Grade und Unterabtheilungen und numerire, wie es die Figur angibt, von 0 bis 360 Grad. Man verfertige ferner die Tangentenscale Fig. 4. Für einen beliebigen Radius = r berechne man die Tangenten der Winkel von Secunde zu Secunde. Die Entfernung r trage man nach einem verjüngten Maßstab auf A B, theile sie in eine, nach dem verlangten Grad der Genauigkeit zu bestimmende, Anzahl gleicher Theile (z. B. von 100 zu 100,

von 50 zu 50 Ruthen) und ziehe von den Theilungs- und Endpunkten Perpendikel auf A B. Auf den Perpendikel B C trage man von B aus, nach demselben verjüngten Maßstab wie A B, oder auch nach einem beliebigen andern, die berechneten Tangenten gegen C hin und ziehe nach deren Endpunkten von A aus die Transversalen A 1″, A 2″, A 3″ u. s. w. Endlich schließe man die Figur durch eine parallel mit A B gezogene Linie C D; die Durchschnittspunkte derselben mit denjenigen Transversalen, deren Tangenten zu groß sind, um bequem aufgetragen werden zu können, geben sich durch eine leichte Rechnung.

Auf demjenigen Radius des Quadranten, der mit dem Radius A B einen Winkel $= O + y$ bildet, bestimme man nach dem Maßstab, nach welchem die Tangenten aufgetragen wurden, einen Punkt, dessen Entfernung vom Centrum A = E ist, so ist der Perpendikel von jenem Punkt auf den Radius A B $= E \sin (O + y)$; da

$\sin \alpha = \dfrac{E \sin (O + y)}{G}$ ist, so ist jener Perpendikel auch $= G \sin \alpha$ oder weil α ein so kleiner Winkel ist, daß man $\tan \alpha$ statt $\sin \alpha$ setzen kann, so ist genannter Perpendikel $= G \tan \alpha$. Trägt man ihn von der Linie A B der Tangentenscale aus auf diejenige Verticale, deren Entfernung von A, nach dem Maßstab, nach welchem die Linie A B aufgetragen wurde, gleich G ist in E F, so trifft der Punkt F auf diejenige Transversale A G, welche auf B C oder C D die Anzahl Minuten und Secunden der Parallaxe α anzeigt; nicht nur in dem Fall, wo A B und B C nach einem Maßstab aufgetragen sind, mithin $E F = A E \tan \alpha$ ist, sondern auch wo A B und B C nach verschiedenem Maßstab aufgetragen sind; indem ja E F und B G nach gleichem Maßstab aufge-

tragen werden, mithin nach gleichem Verhältniß verlängert oder verkürzt erscheinen.

Dasselbe gilt für den Winkel y, die Entfernung D und die Parallaxe β.

Der Gebrauch des Instruments ist demnach folgender:

Auf dem verjüngten Maßstab, nach welchem die Tangenten aufgetragen wurden, nehme man die Excentricität E in Zirkel, setze auf dem Quadranten die eine Zirkelspitze in A, die andere auf dem Radius ein, welcher den Winkel ans Centrum O + y oder y angibt, fasse den Perpendikel von letzterm Punkt auf den Radius A B des Quadranten, setze die eine Zirkelspitze auf die Linie A B der Tangentenscale, daß sie die Entfernung G oder D von A aus abschneidet, die andere Zirkelspitze auf die entsprechende Verticale, so bestimmt sie diejenige Transversale, welche auf B C oder C D den Werth der Parallaxe α oder β angibt.

Ist O + y kleiner als 180 Grad, so ist α zu C zu addiren, ist O + y größer, so ist α abzuziehen; ist y kleiner als 180 Grad, so ist β abzuziehen, ist y größer, so ist β zu addiren.

In der Figur wurde A B = r = 5000 Ruthen angenommen, jedoch nur von 1000 zu 1000 Ruthen abgetheilt, um die Figur nicht undeutlich zu machen.

Wenn die Data die Grenzen der Tangentenscale und des Quadranten übersteigen, so lassen sich dennoch die verlangten Parallaxen mit denselben bestimmen. Ist die Distanz G oder D nach dem verjüngten Maßstab größer als AB der Tangentenscale, so nehme man $\frac{1}{n}$ der Entfernung, bestimme die Parallaxe für diese und dividire das Resultat durch n; ist die Excentricität nach dem verjüngten

Maßstab größer als der Radius des Quadranten, so bestimme man die Parallaxe für eine Excentricität $= \frac{1}{m}$ der gegebenen und multiplicire das Resultat mit m, um die verlangte Parallaxe zu erhalten. Dieses gilt jedoch nur, so lange m und n solche Werthe haben, daß die Parallaxen sich noch annäherungsweis umgekehrt wie die Entfernungen und direkt wie die Excentricitäten verhalten.

Statt der Tangentenscale und des Kreisquadranten kann ein einziges Instrument so angegeben werden, daß selbst der Gebrauch des Zirkels umgangen und der Werth jeder Parallaxe durch bloßes Nachfahren aufgesucht werden kann.

Dieses geschieht, indem man mit der Tangentenscale, wie sie oben construirt wurde, statt des Quadranten eine Sinusscale verbindet, wie sie in Fig. 5 auf den vier Spalten bei **B C F E** angegeben ist, so daß diese den Werth von **E** sin $(O + y)$ oder **E** sin y für **E** = **A B** angibt und man durch Nachfahren auf der Tangentenscale den Werth für jede andere von **A** aus gegen **B** gerechnete Excentricität findet; daß man durch Nachfahren auf den horizontalen Parallellinien zu der Transversalen gelangt, die auf **B C** die Parallaxe bestimmt.

Man construire zuerst die Tangentenscale. Zu diesem Ende messe man **A B** auf einem beliebigen Maßstab; für einen Radius gleich dem dadurch erhaltenen Werth berechne man die Tangenten der Winkel, trage sie von **B** aus auf **B C** und ziehe die Transversalen von **A** aus; dieses kann für jede einzelne Secunde der drei ersten Minuten, und für je fünf Secunden etwa der vierten und fünften Minute geschehen. Dann setze man die Linie **A B** als Grundlinie der Tangentenscale einer gewissen Entfer-

nung des Objects vom Centrum gleich, theile sie in die nöthige Anzahl gleicher Theile, ziehe die correspondirenden Verticalen und bezeichne jede mit einem Index, welcher die correspondirende Entfernung des Objects vom Centrum angibt.

Nun berechne man, ebenfalls für **A B** als Radius nach demselben Maßstab gemessen, die Sinus der einzelnen Grade und Unterabtheilungen von 0 bis 90 Grad, wodurch man zugleich die Sinus der Winkel bis zu 360 Grad erhält; dieselben trage man von **B** aus auf **B C** ab, ziehe durch die so bestimmten Punkte Horizontallinien, und bezeichne jede mit einem Index, der den correspondirenden Winkel angibt. Die Linie **A B** sehe man als Excentricität von gegebener Länge an, theile sie in eine Anzahl gleicher Theile, ziehe die correspondirenden Verticallinien und bezeichne jede mit einem Index, welcher die correspondirende Excentricität angibt.

Es ist bequem, die zweite Theilung der Linie **A B** mit der ersten übereinstimmen zu lassen, so daß also jede Verticallinie mit zwei Zahlen bezeichnet ist, wovon eine die Entfernung des Objects von der Station, die andere die Größe der Excentricität angibt.

Ist nun irgend ein Winkel ans Centrum $O + y$ oder y gegeben, und die Linie **G N** mit diesem Winkel bezeichnet, so ist **B G** der Werth von $E \sin (O + y)$ oder $E \sin y$ für $E = A B$. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke **B G A** und **I H A** ist also **H I** der Werth von $E \sin (O + y)$ oder $E \sin y$ für eine Excentricität $E = A I$. Ist nun **L M** diejenige Verticale, welche der Distanz **G** oder **D** entspricht, und **H L** die dem Punkt **H** correspondirende Horizontale, so ist $L M = E \sin (O + y) = G \operatorname{tg} \alpha$ oder $L M = E \sin y = D \operatorname{tg} \beta$, mithin ist **A L**

die Transversale, welche auf der Tangentenscale den Werth der Parallaxe angibt.

Wird der Radius, nach welchem die Tangenten- und Sinusscale berechnet wird, größer oder kleiner genommen, so werden beide Scalen nach demselben Verhältniß verlängert oder verkürzt, stimmen mithin immer so mit einander überein, daß man mit den nämlichen Werthen der gegebenen Größen die nämlichen Parallaxen erhält. Anstatt **A B** kann man also jeden andern Radius **B C** zur Berechnung beider Scalen annehmen.

Der Gebrauch des Instruments ist mithin folgender:

Man suche den gegebenen Winkel in der Sinusscale auf, fahre auf der correspondirenden Transversalen der Tangentenscale gegen **A** hin, bis zu derjenigen Verticalen, welche mit der gegebenen Excentricität bezeichnet ist. Von dort fahre man auf der correspondirenden Horizontallinie bis zu derjenigen Verticalen, welche mit der Distanz des Objects von der Station bezeichnet ist, so kommt man auf die von **A** aus gehende Transversale, die auf der Tangentenscale den Werth der Parallaxe angibt.

Um die der quadratischen Form vorzuziehende bequemere des Rechtecks zu haben, ist in der Figur vorausgesetzt, daß **A B** = 24 Zoll, **B C** = 16 Zoll ist; es ist ferner angenommen, daß **A B** als Distanz einer Länge von 16000 Ruthen, als Excentricität aber einer Länge von 4 Ruthen entspricht; daß **A B** in 80 gleiche Theile getheilt werde, also die Theilpunkte den um 200 zu 200 Ruthen zunehmenden Distanzen oder den um je fünf Zoll zunehmenden Excentricitäten entsprechen; es wurde aber, der Deutlichkeit der Figur wegen, immer nur die zehnte Verticale ausgezogen.

Die nämliche Centrirscale kann verschiedenen Voraus-

setzungen hinsichtlich der Werthe von A B entsprechen, wenn nur die Numerirung demgemäß gemacht wird; so könnte die nämliche Scale für eine Excentricität von 10 Ruthen bei einer Distanz von 24000 Ruthen eingerichtet werden; man müßte zu dem Ende unterhalb der Scale noch mehrere horizontale Linien ziehen, die Verticalen bis dahin verlängern und dort jede mit dem entsprechenden Index bezeichnen.

Die Dimensionen der Centrirscale sind zwar willkührlich; dem Bearbeiter dieser Abhandlung scheinen jedoch die oben angegebenen am zweckmäßigsten zu seyn, und er hat sich einer solchen Scale bei ausgedehnten trigonometrischen Messungen mehrere Jahre lang mit Vortheil und großer Zeitersparniß bedient. Die damit zu erreichende Genauigkeit ist in den meisten Fällen völlig hinreichend, da mittelst derselben Parallaxen, welche 3 bis 4 Minuten nicht übersteigen, leicht auf ein bis zweizehntels Secunden genau gefunden werden können.

Graphische Correction der Dreiecke.

Bei der Mathematik und ihrer Anwendung kann man die Werthe der gesuchten Größen meistentheils nur annähernd erhalten, theils weil die genauen Werthe irrational sind, theils auch weil sie aus Beobachtungs- und Erfahrungsresultaten abgeleitet werden müssen, welche mehr oder weniger ungenau sind. In manchen Fällen ist bloßes geometrisches Zeichnen hinreichend, um Resultate zu erhalten, deren Genauigkeit dem praktischen Zwecke genügt; in manchen Fällen muß aber durch Rechnung größere Schärfe erzielt werden. Das Verfahren der Annäherung ist dann, je nach der Natur der Aufgabe, sehr verschieden, und besteht entweder in fortgesetztem mühsamen Substituiren, oder in Anwendung des falschen Satzes, der continuirlichen Brüche, der convergirenden Reihen u. s. w., in vielen Fällen wird die Rechnung durch die geometrische Construction sehr erleichtert; entweder wird die Aufgabe nach einem Maßstab geometrisch construirt, und das gemessene Resultat gibt den ersten Annäherungswerth, aus welchem die Rechnung genauere Resultate findet, oder die Rechnung hat für die gesuchten Größen Annäherungswerthe gefunden, welche dann durch leichte Construction corrigirt werden. Bei manchen Aufgaben enthält die Annäherungsrechnung zugleich die Probe über die Richtigkeit des Resultats, besonders bei solchen, wo

die Differenzen der nach einander erhaltenen Annäherungs-resultate immer kleiner werden; in vielen Fällen muß die Richtigkeit des Resultats durch Wiederholung der Rechnung erprobt werden, oder auch durch das Verfahren, daß man auf verschiedenem Weg für dieselbe Größe übereinstimmende Resultate erhält. — Letzteres Verfahren wird mit Vortheil angewendet bei der Correction solcher Bestimmungen, welchen Messungen zum Grunde liegen; wo man auch die Elemente der Berechnung, und nicht bloß die Resultate derselben zu berichtigen hat. So z. B. corrigirt man Elemente der Berechnung, indem man die gemessenen Winkel eines Dreiecks oder Polygons berichtigt; man corrigirt Resultate, indem man durch die Differenzen der berechneten Coordinaten der Dreieckspunkte, und der bekannten Coordinaten der Dreiecke vorhergehenden Ranges die Summe der Fehler kennen lernt, und auf die Coordinaten gehörig vertheilt. Bei solchen Correctionen ist das Verfahren je nach der Aufgabe verschieden; es besteht in bloßer arithmetischer Ausmittlung, oder in Austheilung der Summe der Fehler nach der Wahrscheinlichkeit, in Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate und anderer. Die so verbesserten Elemente und Resultate sind in so fern als richtig anzunehmen, als sie den in der Natur der Sache gegründeten Bedingungen Genüge leisten; es ist immer diejenige Correctionsmethode vorzuziehen, die sich leicht anwenden läßt, deren Resultate den Bedingungen am besten entsprechen und mit dem größten Grade der Wahrscheinlichkeit den wahren Werthen am meisten sich annähernd, angenommen werden können.

Ein schönes Beispiel über die Anwendung der Construction auf die Annäherungsberechnung und auf die Correction trigonometrischer Berechnungs-Elemente und

Resultate, hat uns Tulla in seiner construirenden Correctionsmethode hinterlassen, welche bei der Ausübung vielfach den Beweis geliefert hat, daß sie den obenangedeuteten Erfordernissen in hohem Grade entspricht.

Wenn man die Lage eines Objects **M** Fig. 6 aus den bekannten Standlinien **A B**, **B C** und **A C** bestimmt, so erhält man, weil die Winkel α, β, γ und δ nie ganz genau gemessen werden können, für das Object **M** mehrere Positionen; nämlich aus der Standlinie **A B** den Punkt **a**, in dem sich die Schenkel der Winkel α und β schneiden, aus der Standlinie **B C** den Punkt **b**, wo sich die Schenkel der Winkel γ und δ schneiden und aus der Standlinie **A C** den Punkt **c**. Weil nun keiner dieser Punkte als der richtige angesehen werden kann, wenn es unsicher ist, an welchen Winkeln gefehlt wurde, so darf man für den definitiven Ort des Objects weder den einen, noch den andern dieser Punkte annehmen, sondern man muß einen andern Punkt wählen, von welchem man mit Wahrscheinlichkeit annehmen kann, daß seine Lage die richtige sey.

Die Lage der Punkte **a**, **b**, **c** hängt sowohl von der Lage der Punkte **A**, **B**, **C** als von den Winkeln α, β, γ, δ ab, und man könnte daher, weil eigentlich weder die Lage der Punkte **A**, **B**, **C** noch die Werthe der Winkel α, β, γ, δ ganz zuverlässig sind, die Lage der Punkte **a**, **b**, **c** dadurch übereinstimmend machen, daß man jedes dieser Elemente etwas änderte. Die Lage der Punkte **A**, **B**, **C** ist aber entweder definitiv bestimmt, oder sie ist doch vorläufig so berichtigt, daß man nur durch den Mangel des Schlusses bei Beendigung der Dreieckskette, oder durch das Nichtanschließen an die Dreiecke vorhergehenden Ranges oder durch andere Umstände bestimmt werden könnte, mit der ganzen Dreieckskette eine nochmalige Correction vorzuneh-

men, mithin auch die Lage der Punkte A, B, C zu ändern. Sofern wird also bei der Bestimmung der Lage des Objects M angenommen, daß die Lage der Punkte A, B, C die richtige sey, und man vor der Hand bloß die Winkel α, β, γ, δ zu verbessern habe.

Man kann diese Winkel auf sehr viele Arten so ändern, daß die Lagen für das Object, die man aus den Dreiecken erhält, mit einander übereinstimmen. Es ist aber vorauszusetzen, daß man bei den Dreiecksberechnungen nur gute Messungen brauchen werde, daß also bloß unvermeidliche, mithin sehr kleine Fehler begangen worden seyen. Um daher mit Wahrscheinlichkeit annehmen zu können, daß die durch die corrigirten Winkel sich ergebende Lage des Objects M der Wahrheit näher komme, als die Punkte a, b, c, so muß man jeden der Winkel α, β, γ, δ so wenig als möglich ändern. Untersucht man die Aenderungen der Winkel, welche Statt finden, wenn man dem Object der Reihe nach die möglichen verschiedenen Lagen in und außerhalb des Dreiecks a b c, welches man das Fehlerdreieck nennen kann, gibt; so findet man, daß die einzelnen Winkel so wenig als möglich geändert werden, wenn das Object im Fehlerdreieck angenommen wird; indem bei einer Lage in einer Seite oder außerhalb des Dreiecks zwar ein Winkel sehr wenig oder gar nicht, ein anderer aber desto mehr geändert wird. Für Figur 6 sind demnach die Winkel α und β zu verkleinern und die Winkel γ und δ zu vergrößern.

Wenn nun die gemessenen Winkel, wegen der Gleichheit der Umstände bei den Messungen hinsichtlich der gleichen Geschicklichkeit und Sorgfalt der Beobachter, der Vollkommenheit der Instrumente, der Deutlichkeit der Signale wegen der Entfernung, Beleuchtung, Witterung

u. s. w. gleiches Zutrauen verdienen, so ist anzunehmen, daß bei allen Winkeln gleichviel gefehlt sey, man dieselben also um gleichviel zu corrigiren habe. Wenn aber die Winkel nicht gleiches Zutrauen verdienen, so hat man, nach Erwägung aller bei der Winkelmessung obwaltenden Umstände, ein wahrscheinliches Verhältniß der bei den Winkeln begangenen Fehler, mithin auch der anzubringenden Correctionen, anzunehmen.

Es sey M Figur 7 der zu suchende Punkt. Man fälle die Perpendikel MD, ME und MF auf die Seiten des Fehlerdreiecks und ziehe die Linien MA, MB und MC. Es sey $MA = a$, $MB = b$ und $MC = c$; es sey ferner $MAa = \alpha'$ die Correction des Winkels α, $MBb = \beta'$ die Correction des Winkels β, also auch des Winkels γ und $MCc = \delta'$ die Correction des Winkels δ, so ist $MD = a \sin \alpha'$, $ME = b \sin \beta'$ und $MF = c \sin \delta'$, oder weil die Winkel α', β' und δ' so klein sind, daß man statt der Sinus die Bogen α', β', δ' setzen kann, welche die Winkel messen, so ist $MD = a\,\alpha'$, $ME = b\,\beta'$ und $MF = c\,\delta'$ mithin verhält sich

$$MD : ME : MF = a\,\alpha' : b\,\beta' : c\,\delta'$$

oder, wenn m, n und p die Verhältnißzahlen der Winkelfehler sind

$$MD : ME : MF = a\,m : b\,n : c\,p.$$

Man erhält also zur Bestimmung der wahrscheinlich richtigen Lage des Objects folgende Regel:

Das Object M liegt innerhalb des Fehlerdreiecks, so daß die von M auf die Seiten des Dreiecks gefällten Perpendikel sich verhalten, wie die Produkte aus den Distanzen des Objects von den Endpunkten der Standlinien in die Verhältnißzahlen der Winkelfehler; also wie die

Distanzen selbst, wenn die Winkel gleiches Zutrauen verdienen.

Zur Bestimmung des Objects M kann man also auf folgende Art verfahren:

Man construire das Fehlerdreieck nach einem hinlänglich großen Maßstab, oder in natürlicher Größe, wenn die Seiten nicht zu groß sind. Dazu sind gegeben die Seite a b = a B — b B, die Seite a c = A a — A c und die Seite b c = c C — b C; ferner sind gegeben die drei Winkel, wovon zwei, nämlich c a b und c b a, bei der Dreiecksberechnung schon vorkamen und der dritte a c b der Nebenwinkel des dort schon vorgekommenen Winkels A c C ist. Deßwegen kann man sich bei der Construction des Fehlerdreiecks einer Seite und der anliegenden Winkel bedienen, und aus der Uebereinstimmung der Werthe, die man durch die Berechnung und durch die Construction erhielt, sich um so leichter überzeugen, daß sich in der Berechnung kein Fehler eingeschlichen hat.

Nachdem das Fehlerdreieck construirt ist, suche man in demselben den Punkt M so, daß die drei Perpendikel von demselben auf die Seiten des Dreiecks sich verhalten, wie die Größen a m, b n und c p. Um dieses durch eine rein geometrische Construction zu bewerkstelligen, ziehe man auf die Seiten a c und a b Perpendikel, die sich verhalten, wie die Größen a m und b n; durch ihre Endpunkte ziehe man Linien parallel zu a c und a b, und von a aus durch ihren Durchschnittspunkt eine gerade Linie; man ziehe ferner auf die Seiten a b und c b Perpendikel, die sich verhalten, wie die Größen b n und c p; durch ihre Endpunkte ziehe man Linien parallel zu a b und c b und durch den Durchschnittspunkt derselben von b aus eine ge-

rade Linie; der Durchschnittspunkt dieser Linie mit der von a aus gezogenen ist der verlangte Punkt M.

Zur Berechnung der Größen a m, b n und c p hätte man die Größen a, b und c in Rechnung zu bringen, welche das Resultat der Correction selbst ausmachen. Die Entfernungen des Punktes M von A, B und C sind aber so groß, daß selbst ein Fehler von einigen Ruthen in denselben auf die Bestimmung des Punktes M keinen merkbaren Einfluß hat; deßwegen kann man die schon berechneten Entfernungen der Punkte a, b, c von A, B, C oder nach der wahrscheinlichen Lage des Punktes M zu bestimmende Mittelwerthe statt der Größen a, b, c in Rechnung bringen.

Es kann der Fall eintreten, daß man, statt alle drei Verhältnißzahlen zu bestimmen, eine oder die andere Winkelcorrection nach der Wahrscheinlichkeit gleich definitiv annimmt, ins Fehlerdreieck einträgt und nur die übrigen durch das Dreieck bestimmt.

Man lasse von dem so bestimmten Punkt M die Perpendikel M D, M E und M F auf die Seiten des Dreiecks fallen, messe dieselben nach dem bei der Construction des Fehlerdreiecks angewendeten Maßstab, so wie ihre Abstände von den Punkten a, b und c, bestimme aus diesen und aus den bekannten Entfernungen der Punkte a, b, c von den Punkten A, B, C die Linien D A, F C und E B, so hat man die Katheten der rechtwinklichten Dreiecke A D M, B E M und C F M, woraus sich nun die Winkel α', β', δ', so wie die Entfernungen M A, M B und M C berechnen, oder auf sonstige Art, durch Anwendung von Tangentenscalen oder Tabellen &c., bestimmen lassen.

Man kann aber die in vorhergehender Auflösung ange-

deuteten Rechnungen umgehen, und die Correction unmittelbar durch die Figur vornehmen, wenn man die Lage des Punktes M auf folgende Art bestimmt:

Man berechne die Werthe des Sinus oder der Tangente von einer Secunde für Radien, die gleich sind den Linien a, b und c, wofür man, wie oben angedeutet, Annäherungswerthe annehmen kann. Nachdem man auf die früher beschriebene Art das Fehlerdreieck a b c Fig. 8 construirt hat, ziehe man auf die Seiten desselben die Perpendikel a s, b r und c q, trage auf c q den Werth von a sin 1″, auf a s den Werth von b sin 1″ und auf b r den Werth von c sin 1″ mehrmals ab und ziehe durch die so bestimmten Punkte mit den Dreiecksseiten Parallellinien wie h i, K l, m n, so entsprechen dieselben den Correctionen der Winkel α, β, γ und δ für die einzelnen Secunden; wenn man nämlich α um eine Secunde ändert, so ist h i annähernd die Richtung des neuen Schenkels ꝛc. Der Punkt M ist dann da, wo sich diejenigen drei dieser Linien schneiden, welche den Zahlen m, n, p proportionale Correctionen bestimmen. Schneiden sich nicht drei solcher Parallellinien in einem Punkt, so hat man dieselben nach Bedürfniß für halbe, viertels ꝛc. Secunden zu ziehen bis man einen solchen Durchschnittspunkt erhält, oder man kann auch wohl mit Hilfe der Parallellinien für die ganzen oder halben Secunden den Punkt M nach dem Augenmaß hinlänglich genau annehmen. Zieht man wieder die Perpendikel M D, M E und M F auf die Dreiecksseiten, so kann man auf diesen die Winkelcorrectionen ohne weiteres ablesen, indem die Anzahl der Theile, in welche die Perpendikel durch die correspondirenden Parallellinien getheilt werden, gleich ist der Anzahl ganzer Secunden oder Theile derselben, um welche die Winkel α, β, γ und δ zu

corrigiren sind. Die gemessenen Abstände der Perpendikel von den Punkten a, b, c braucht man nur zu den berechneten Abständen dieser Punkte von A, B, C zu addiren oder nach Erforderniß von ihnen abzuziehen, um die verlangten Abstände des Punktes M von den Endpunkten der Standlinien zu erhalten, indem die Winkel M A D, M B E und M C F Figur 7 der rechtwinklichten Dreiecke A M D, B M E und C M F so klein sind, daß man ohne merklichen Fehler den Werth der Katheten A D, B E und C F für die Werthe der Hypothenusen A M, B M und C M annehmen kann. Man mißt also nach dem bei der Construction des Fehlerdreiecks gebrauchten Maßstab die Linien c D, a D, c F, b F, a E und b E, addirt c D zu c A, oder zieht a D von a A ab, um A M zu erhalten; man addirt b E zu b B oder zieht a E von a B ab, um M B zu erhalten; man addirt b F zu b C oder man zieht c F von c C ab, um M C zu erhalten.

Hat man noch, Fig. 6, eine dritte Standlinie C D, durch welche die Lage des Objects bestimmt werden kann, so erhält man drei neue Durchschnittspunkte e, f, g, welche mit den vorigen die Durchschnitte aller vier Visirlinien bilden und die Fehlerdreiecke bestimmen. In diesem Fall, wie auch, wenn noch mehr Standlinien vorhanden sind, geschieht die Bestimmung der Lage des Objects nach denselben Grundsätzen, wie bei zwei Standlinien. Da demnach die Ausführung der Auflösung nur eine Wiederholung des obenvorgetragenen wäre, so wird sie hier übergangen. Dafür soll das vorhergehende durch ein Beispiel näher erläutert werden, wozu aus der Triangulation für die Rheingrenzberichtigung die Dreiecke genommen werden, welche zur Bestimmung des Kirchthurms zu Ensisheim im Oberelsaß, gemessen und berechnet wurden.

Die Resultate der Messung, wie der Correction sind in folgender Tafel zusammen getragen:

Nr. der Seiten	Objecte	Nr. der Winkel	Gemessene Winkel	Corrigirte Winkel	Logarithmen der Seiten	Seiten in Bad. Ruthen
	Ensisheim	58	55° 36′ 18″,5	55° 35′ 53″,0	4,0598401	
				″ ″ 54,1		
39	Catharina	59	60 17 27,6	60 17 25,3	4,0821304	12081,761
				— 0,3		— 053
				″ ″ 25,0		12081,708
40	Belchen	60	64 6 41,7	64 6 41,7	4,0974082	12514,346
				— 0,8		— 068
			+ 27,8	″ ″ 40,9		12514,278
	Ensisheim	61	96 31 18,7	96 31 13,2	4,1799067	
				″ ″ 13,2		
41	Colmar	62	52 29 23,6	52 29 20,1	4,0821272	12081,674
				+ 0,8		+ 034
				″ ″ 20,9		12081,708
42	Belchen	63	30 59 31,7	30 59 26,7	3,8944476	7842,374
				— 0,8		— 049
			+ 14,0	″ ″ 25,9		7842,325

	Ensisheim	64	40	55	18,9	40	55	20,2	3,9219216	
						″	″	19,1		
43	Colmar	65	101	8	5,3	101	8	6,6	4,0974035	12514,211
							+	0,8		+ 067
						″	″	7,4		12514,278
44	Catharina	66	37	56	31,9	37	56	33,2	3,8944414	7842,262
							+	0,3		+ 063
				+	3,9	″	″	33,5		7842,325

Die Endpunkte der Standlinien sind zu Colmar, auf der Catharinenkapelle auf dem Kaiserstuhl und auf dem Belchen. Figur 9. Von den Standlinien sind nur die Logarithmen angegeben *), und zwar in der Spalte der Logarithmen der Seiten mit dem Namen Ensisheim in derselben horizontalen Zeile anzutreffen.

Die Spalte gemessene Winkel enthält die Winkel, wie sie nach geschehener Messung durch das Centriren erhalten wurden. Die Station jedes Winkels war an dem Ort, dessen Namen in der nämlichen horizontalen Zeile steht; die Objecte waren die zwei übrigen der drei Orte, deren Namen jedesmal näher beisammen stehen; so z. B. war der Standpunkt des Winkels 55° 36′ 18″,5 in Ensisheim, die Objecte waren Catharina und Belchen.

Die Summe der Winkel jedes Dreiecks beträgt nicht genau 180 Grad. Der Ueberschuß wurde mit Erwägung der bei der Messung statt gefundenen Umstände, nach der Wahrscheinlichkeit so vertheilt, daß die Winkel auf 180 Grad ausgeglichen wurden. Dadurch erhielt man die vorläufig corrigirten Winkel, wie sie in die Spalte der corrigirten Winkel mit kleinen Ziffern eingetragen sind. Weil die Winkel zu Ensisheim in Vergleich mit den übrigen nur geringes Zutrauen verdienen, so wurden diese Winkel am stärksten, die übrigen weniger geändert.

Durch diese vorläufig corrigirten Winkel und die gegebenen Logarithmen der Standlinien wurden die Logarithmen der Seiten und die Seiten selbst berechnet, wie sie

---

*) Dieses Werkchen soll in den Besitz vieler gelangen, die nicht praktische Geodäten sind; damit auch diese den ganzen Inhalt desselben verstehen mögen, hat man für nöthig erachtet, einiges weiter auszuführen, als es für praktische Geodäten erforderlich wäre.

in die zwei letzten Spalten mit kleinen Ziffern eingetragen sind, und zwar steht jede Seite auf derjenigen horizontalen Zeile, auf welcher der Name des gegenüberliegenden Dreieckspunktes steht. So z. B. ist 12081,761 die Seite Ensisheim Belchen, und 4,0821304 der Logarithmus davon.

Die Seiten Ensisheim Belchen, Ensisheim Catharina und Ensisheim Colmar kommen jede zweimal, jedoch nicht übereinstimmend, vor, deßwegen erhält man ein Fehlerdreieck. Man zieht eine gerade Linie a c Fig. 8, gleich der Differenz der Seiten Nr. 40 und Nr. 43 = 0, 135°. An diese Linie, den Punkt a als Scheitel, trägt man den Winkel Nr. 58 und den Punkt c als Scheitel den Winkel Nr. 64, so erhält man das Fehlerdreieck a b c, worin a b der Differenz der Seiten Nr. 39 und 41, b c der Differenz der Seiten Nr. 42 und 44 und der Winkel bei b dem Winkel Nr. 61 entsprechen wird; vorausgesetzt, daß man die Seiten und Winkel genau genug aufgetragen hat. Die Größe der Sinus oder Tangenten von einer halben Secunde für die Entfernungen des Objects Ensisheim von den Endpunkten der Standlinien sind 0,0293; 0,0303 und 0,0190. Diese werden gehörig aufgetragen und die Parallellinien mit den Seiten gezogen.

Nun verdienen die auf Catharina gemessenen Winkel nach Erwägung aller bei der Winkelmessung obwaltenden Umstände vorzügliches Zutrauen, die Winkel auf dem Belchen und in Colmar sind weniger, jedoch gleich zuverlässig, darum ändert man die Winkel auf Catharina nur um 0,3 Secunden, jene auf dem Belchen und in Colmar um etwa gleich viel. Man nimmt demnach den Punkt M zwischen den Linien a c und m n so an, daß die Abstände von den Linien a c und m n sich verhalten, wie 3 zu 2;

und so, daß die Perpendikel **M E** und **M F** von den Linien **K l** und **h i** nach dem Augenmaß in proportionale Theile getheilt werden, oder so, daß wenn man die Perpendikel mißt, und den Werth des Perpendikels **M F** durch 0,019, den Werth des Perpendikels **M E** durch 0,0293 dividirt, man gleiche Quotienten erhält.

Schätzt man hierauf die Anzahl der Secunden, um welche die Winkel in Colmar und auf dem Belchen geändert werden müssen, oder sucht man sie, indem man den bei der vorhin angedeuteten Division erhaltenen Quotienten halbirt; mißt man ferner die Abstände der Perpendikel **M D**, **M E** und **M F** von den Punkten **a**, **b** und **c**, so erhält man die Correctionen der Winkel und Seiten, und hieraus die verbesserten und definitiven Winkel und Seiten selbst, wie sie in der Tabelle mit großen Ziffern eingetragen sind.

Verbesserungen.

Seite 11 Zeile 5 von unten lies: B C statt A C.
„ 12 „ 11 von unten streiche man das am Schluß sich befindliche I.
„ 20 „ 10 von oben lies: F H statt G H.
„ 26 „ 5 von unten lies: B C statt A B.
„ 29 „ 8 von oben lies: M' N' statt M' N.
„ 34 „ 11 von unten lies: Taf. IX. Fig. 1 statt Taf. IX. Fig. 2.
„ 38 „ 5 von unten lies: C T statt C F.
„ 40 „ 12 und 13 lies: gleich einer der gegebenen, statt: der gegebenen.

Fig: 1

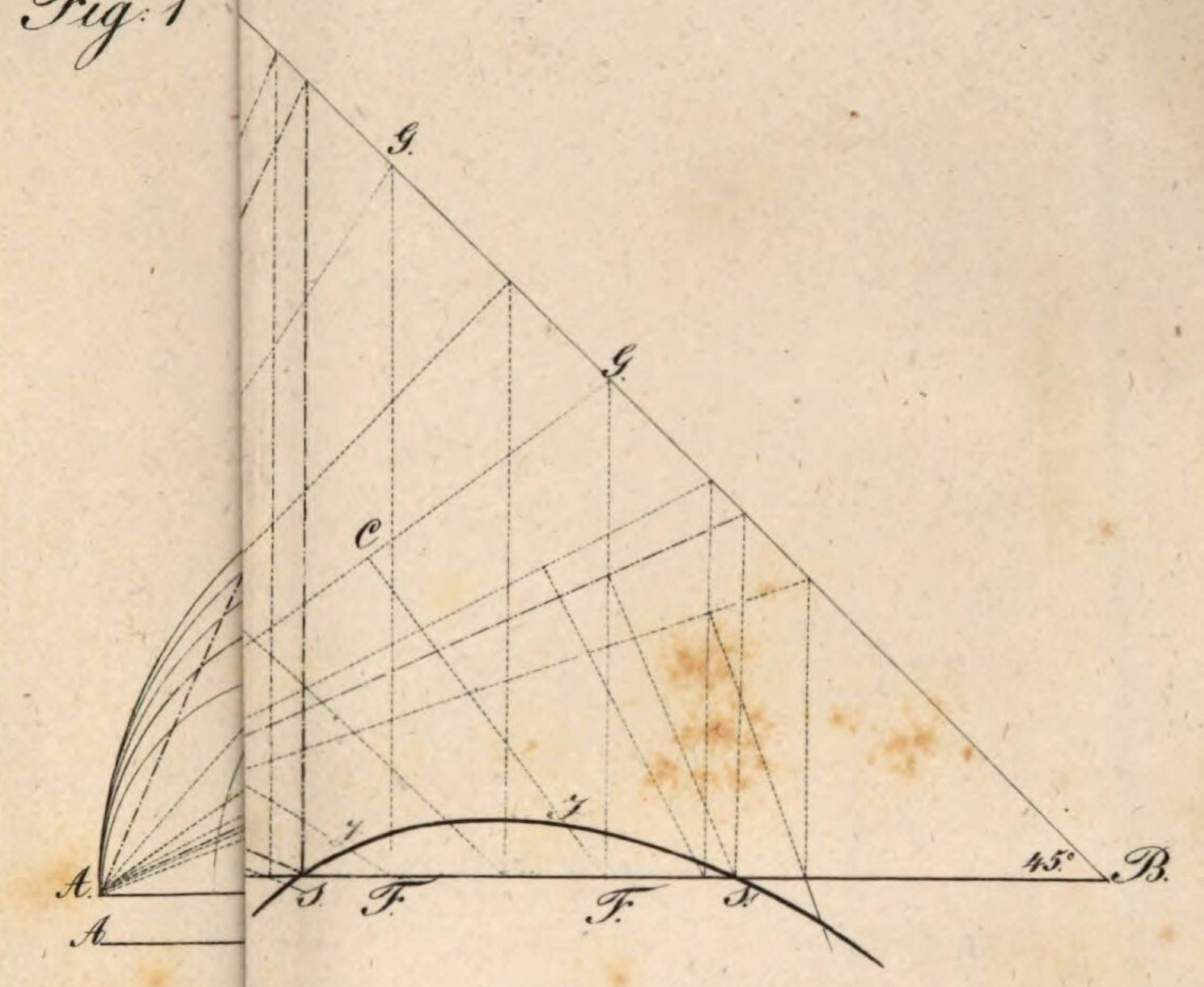


Fig: 3.

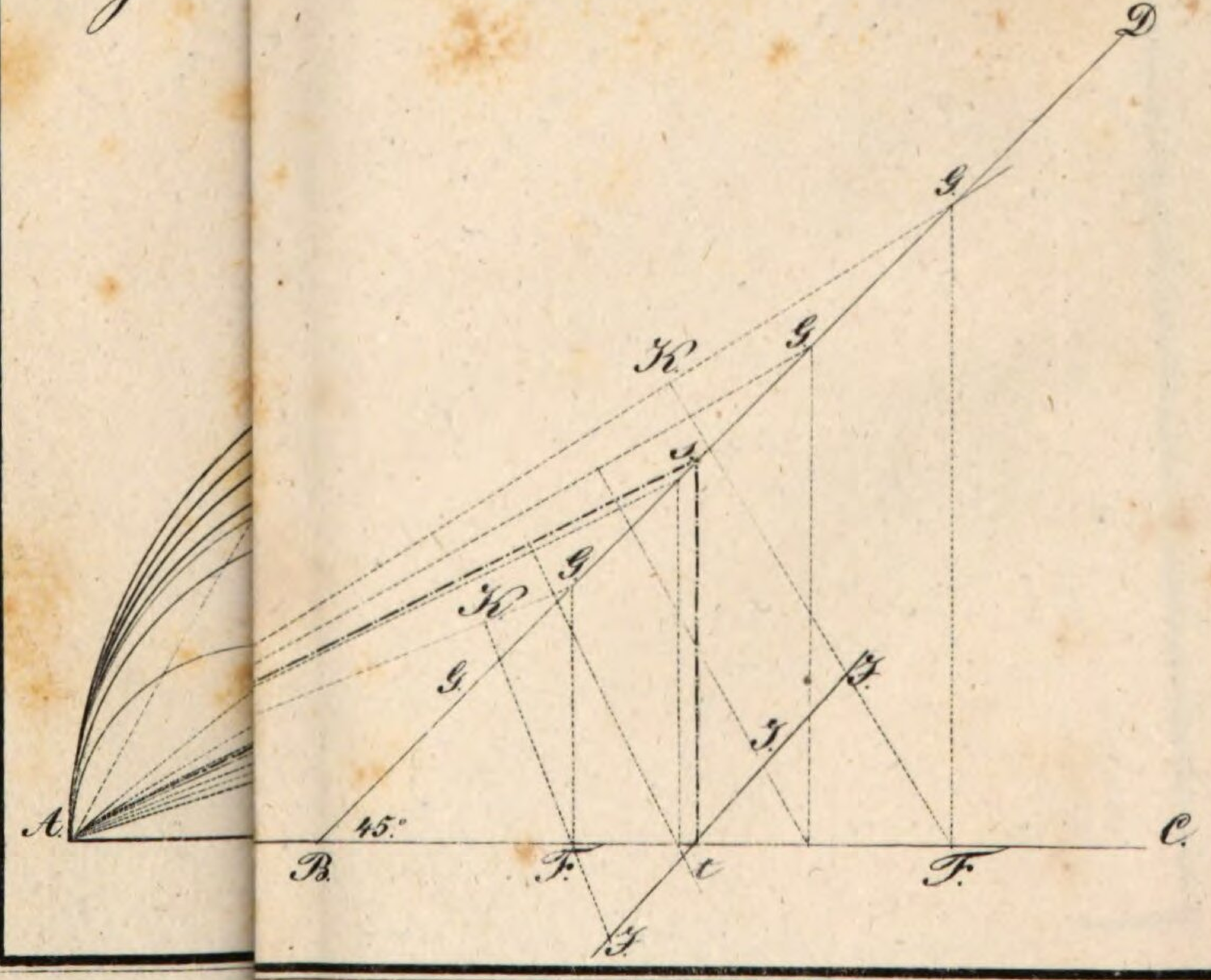


Fig: 1.

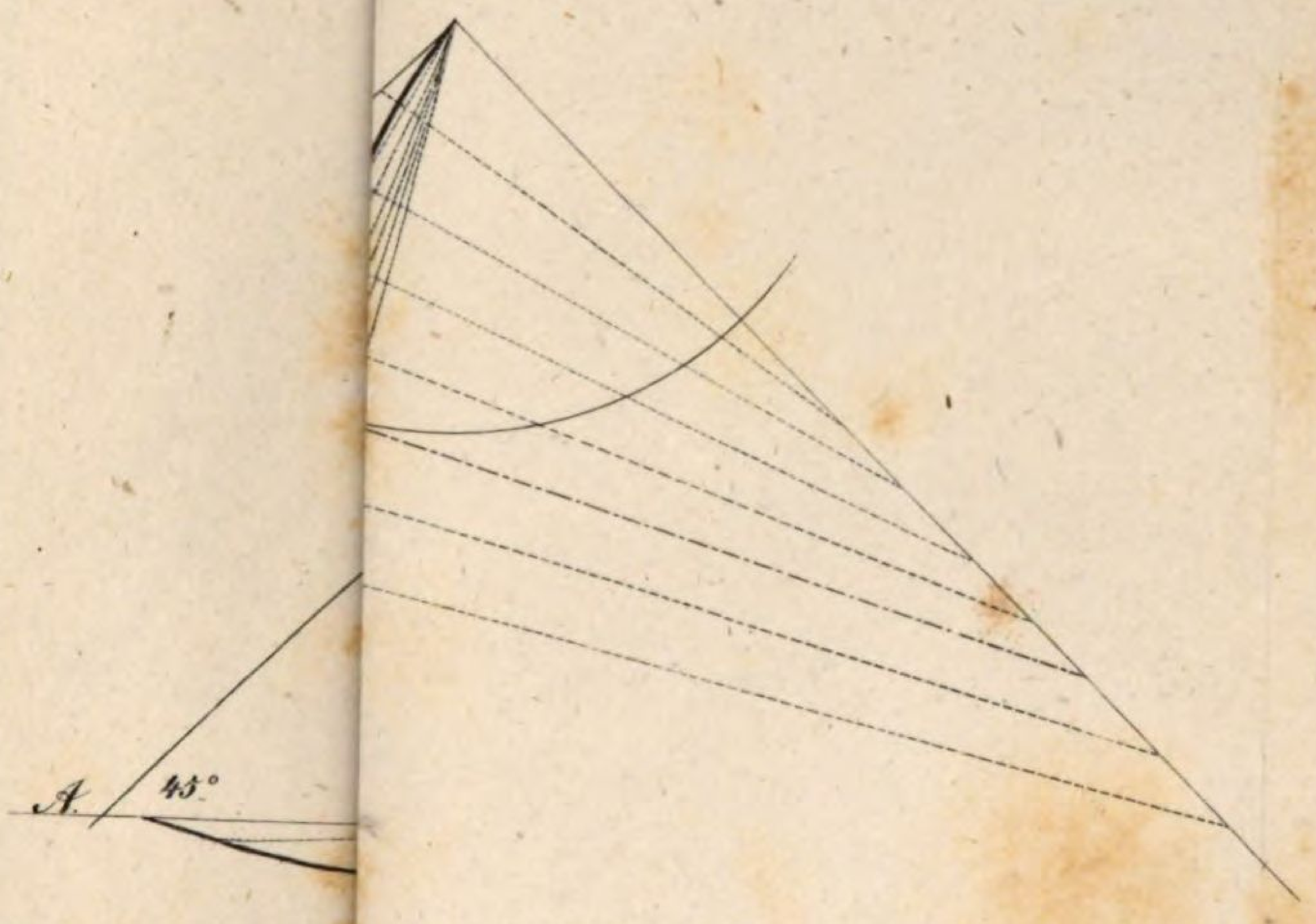


Fig: 3.

Fig: 1.

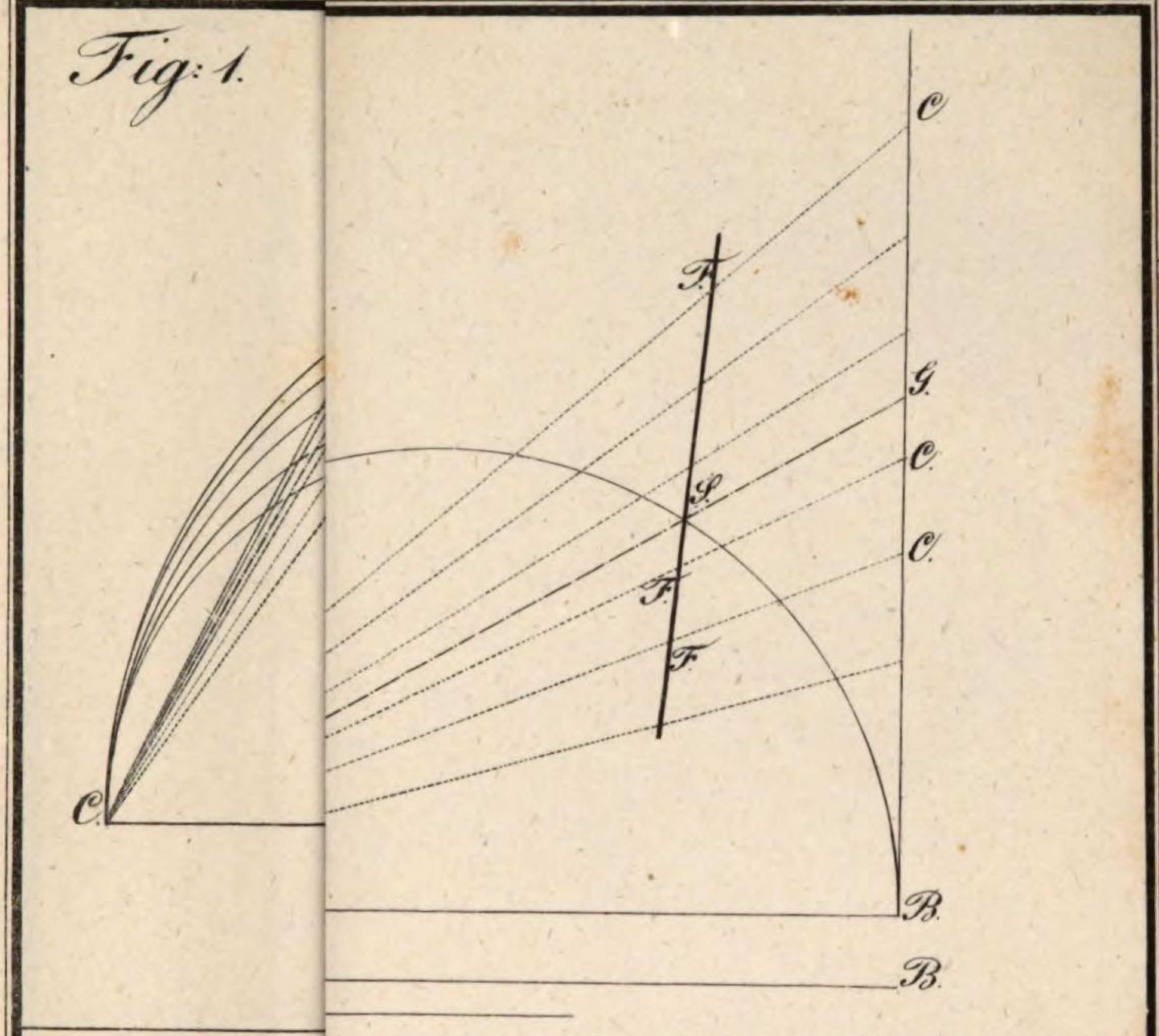


Fig: 4.

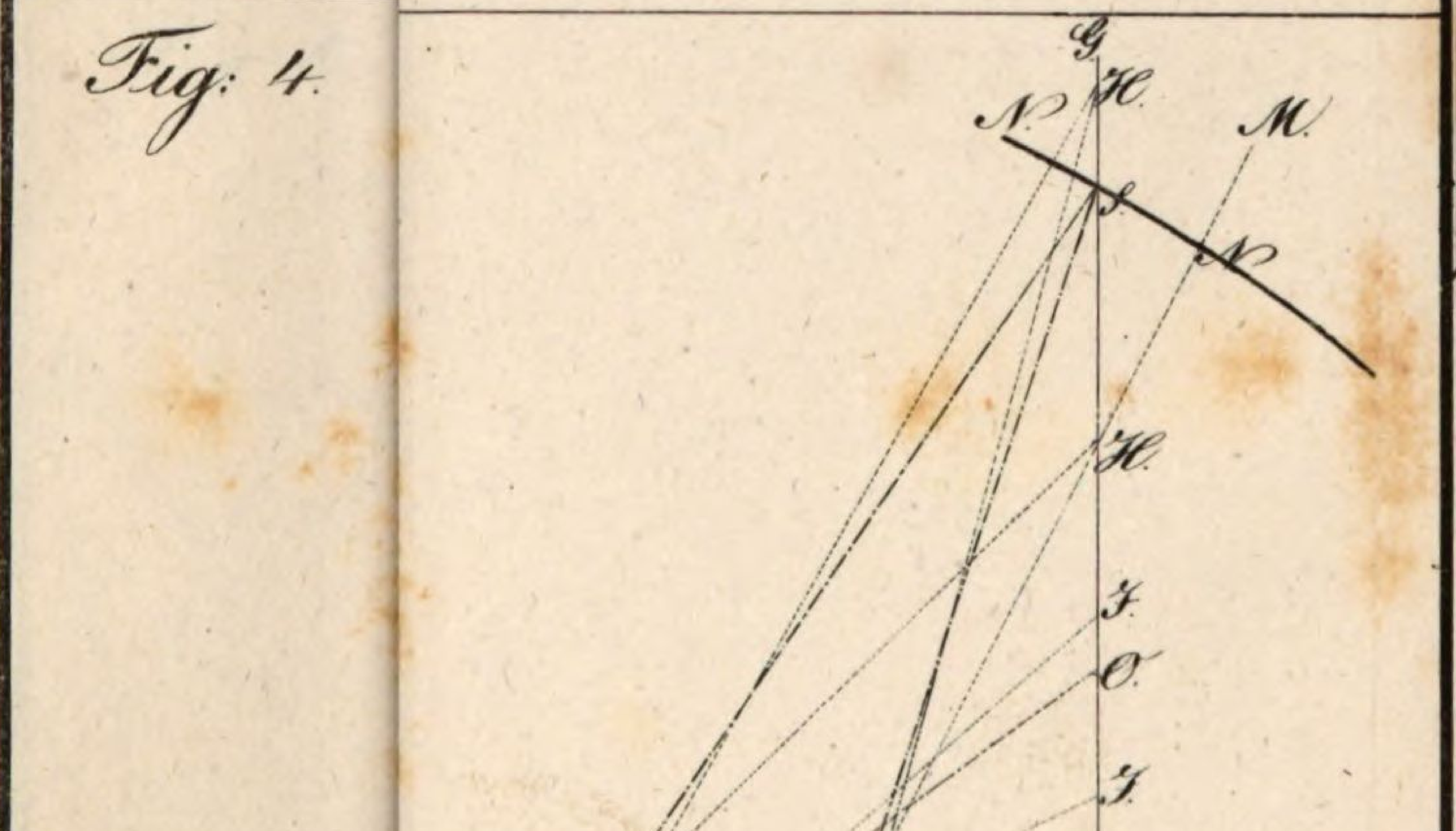


Fig: 1

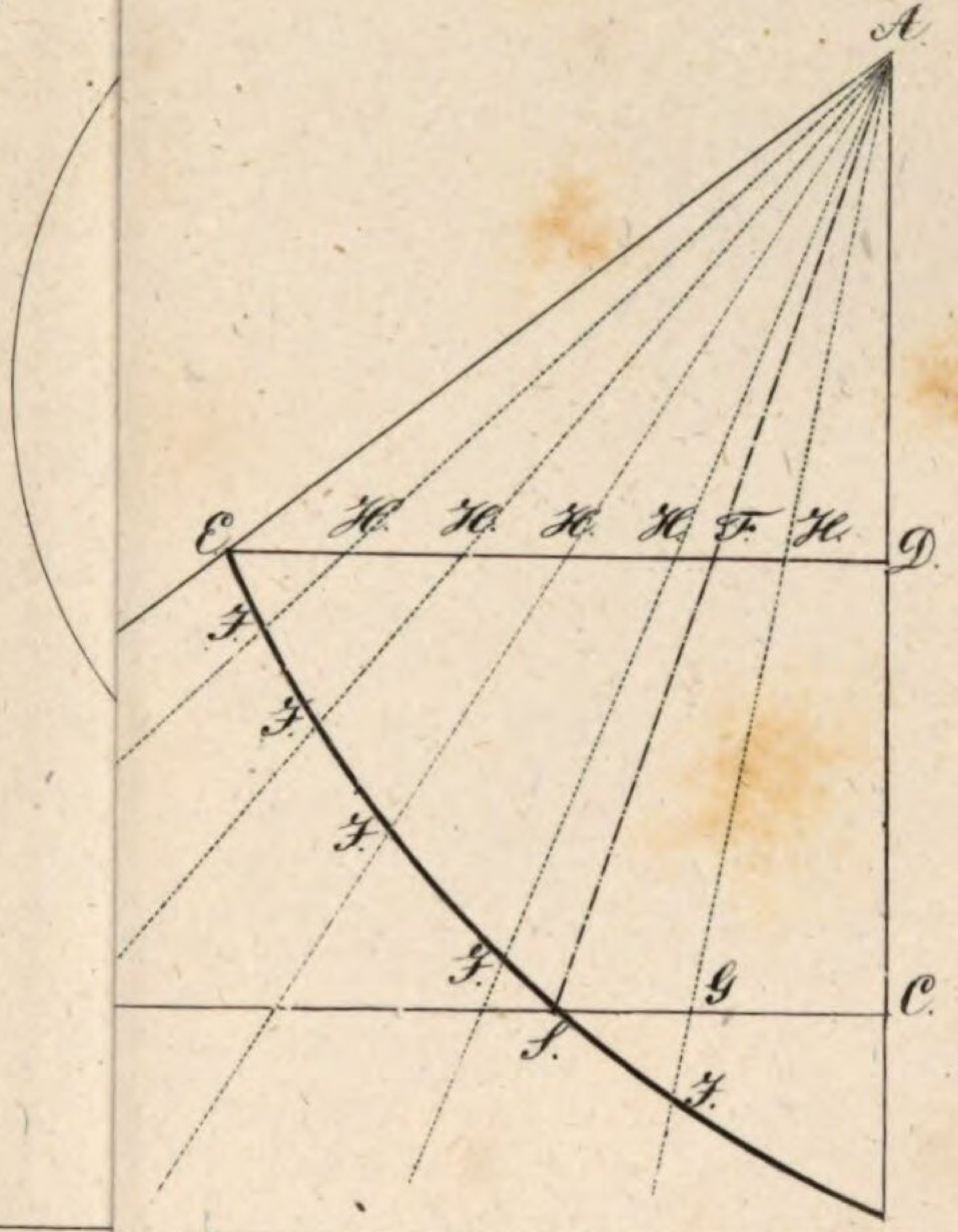
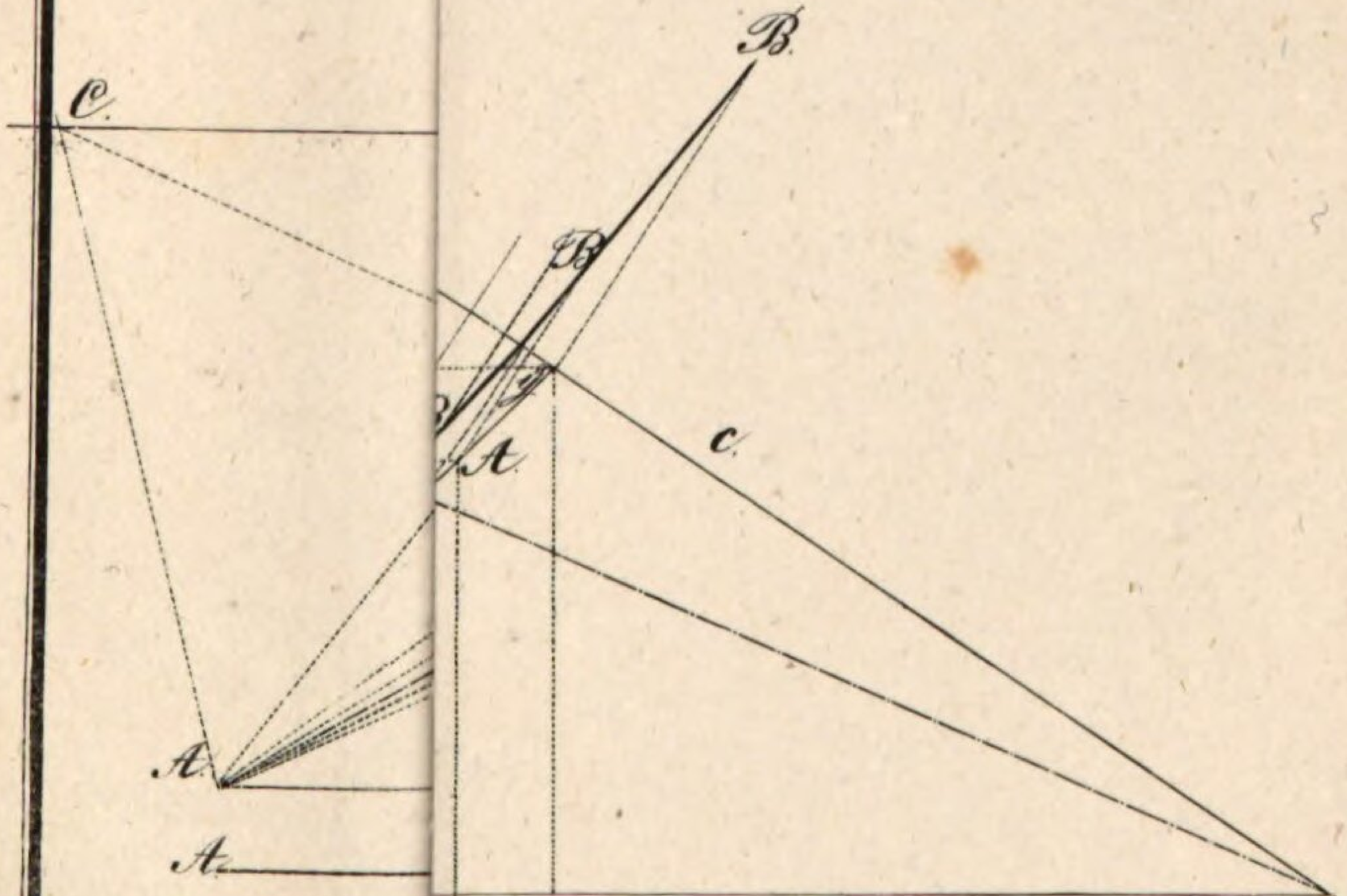


Fig: 4.



Lith. v. P. Wagner.

Fig: 1.

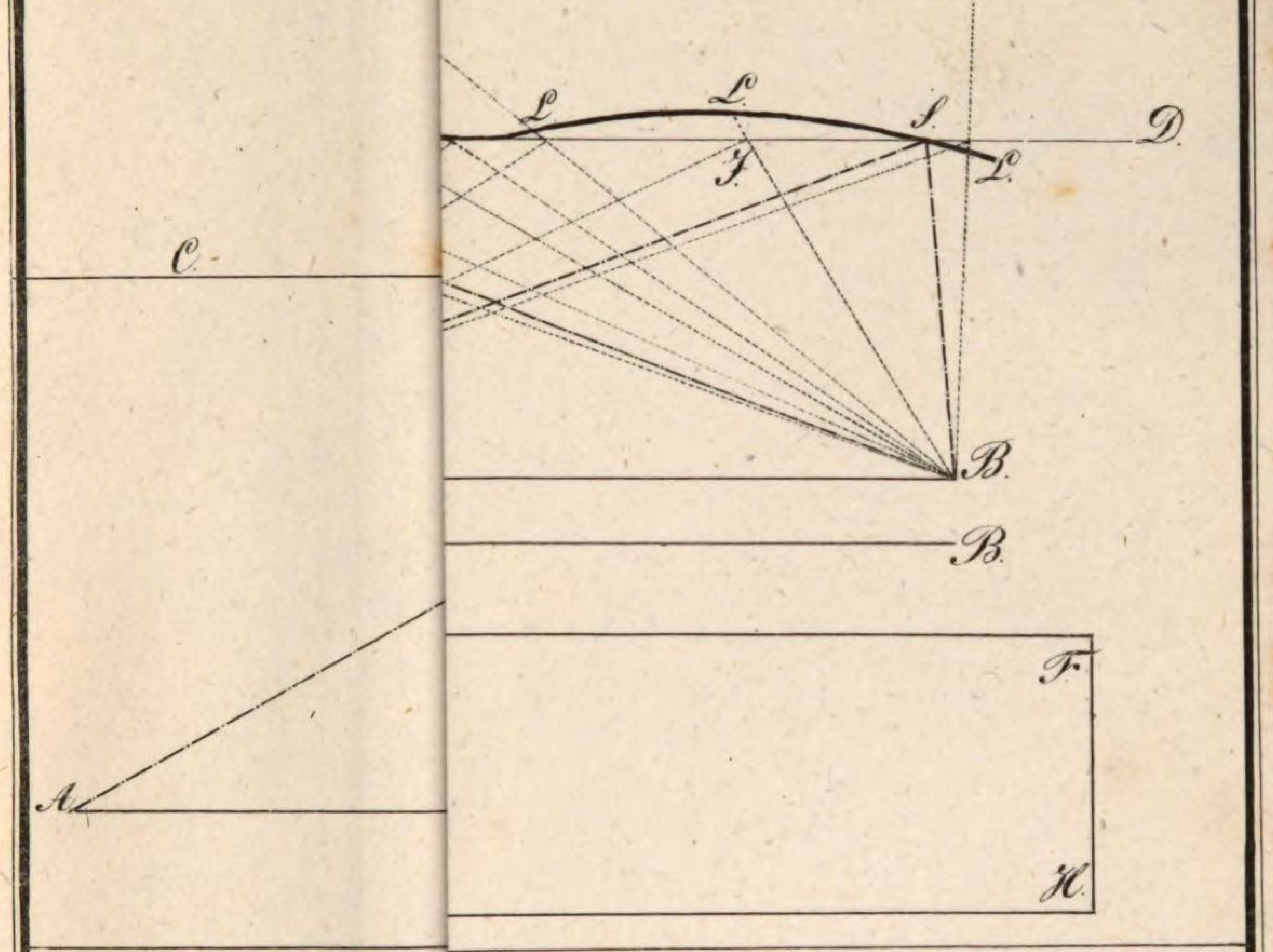


Fig: 3

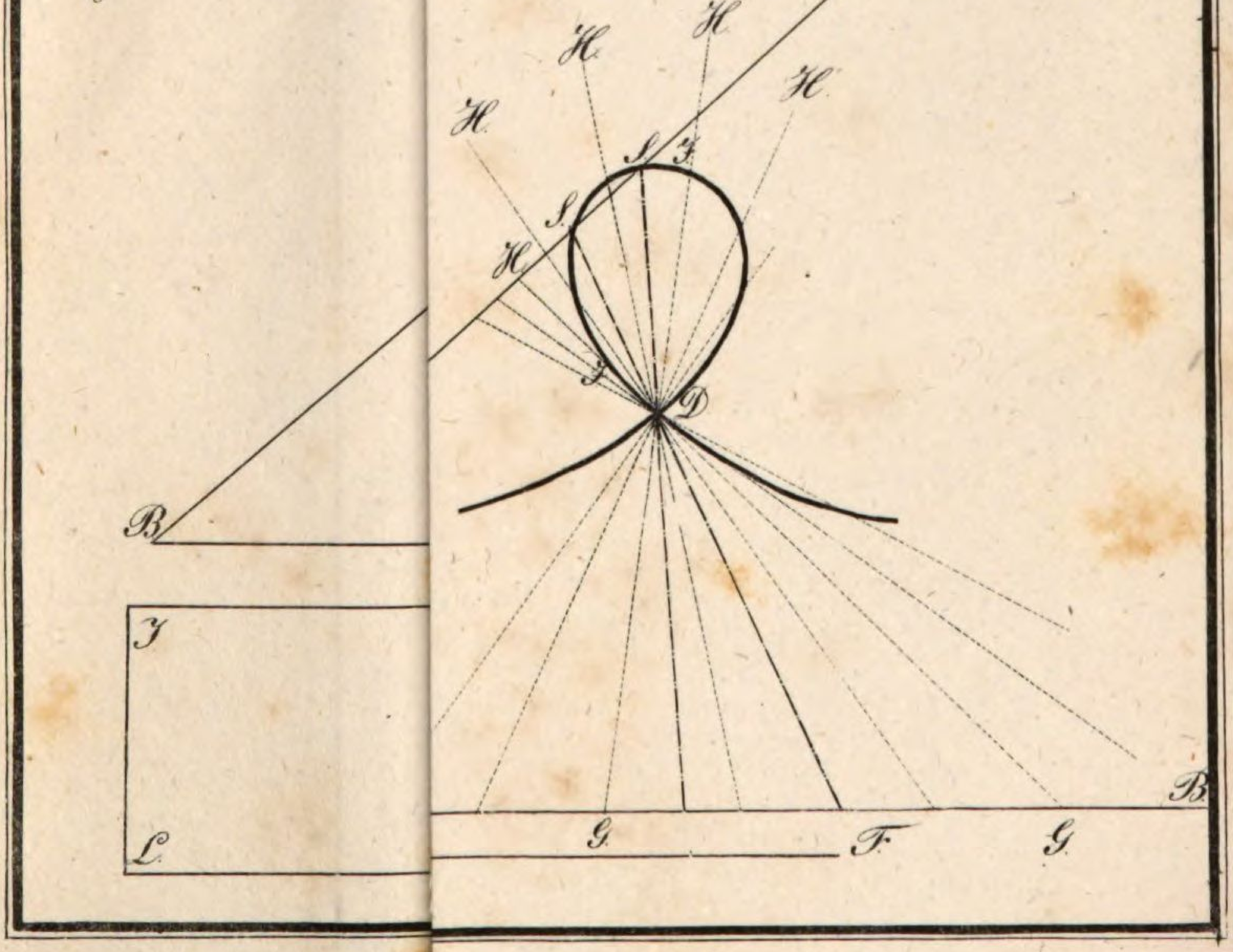


Fig: 1.

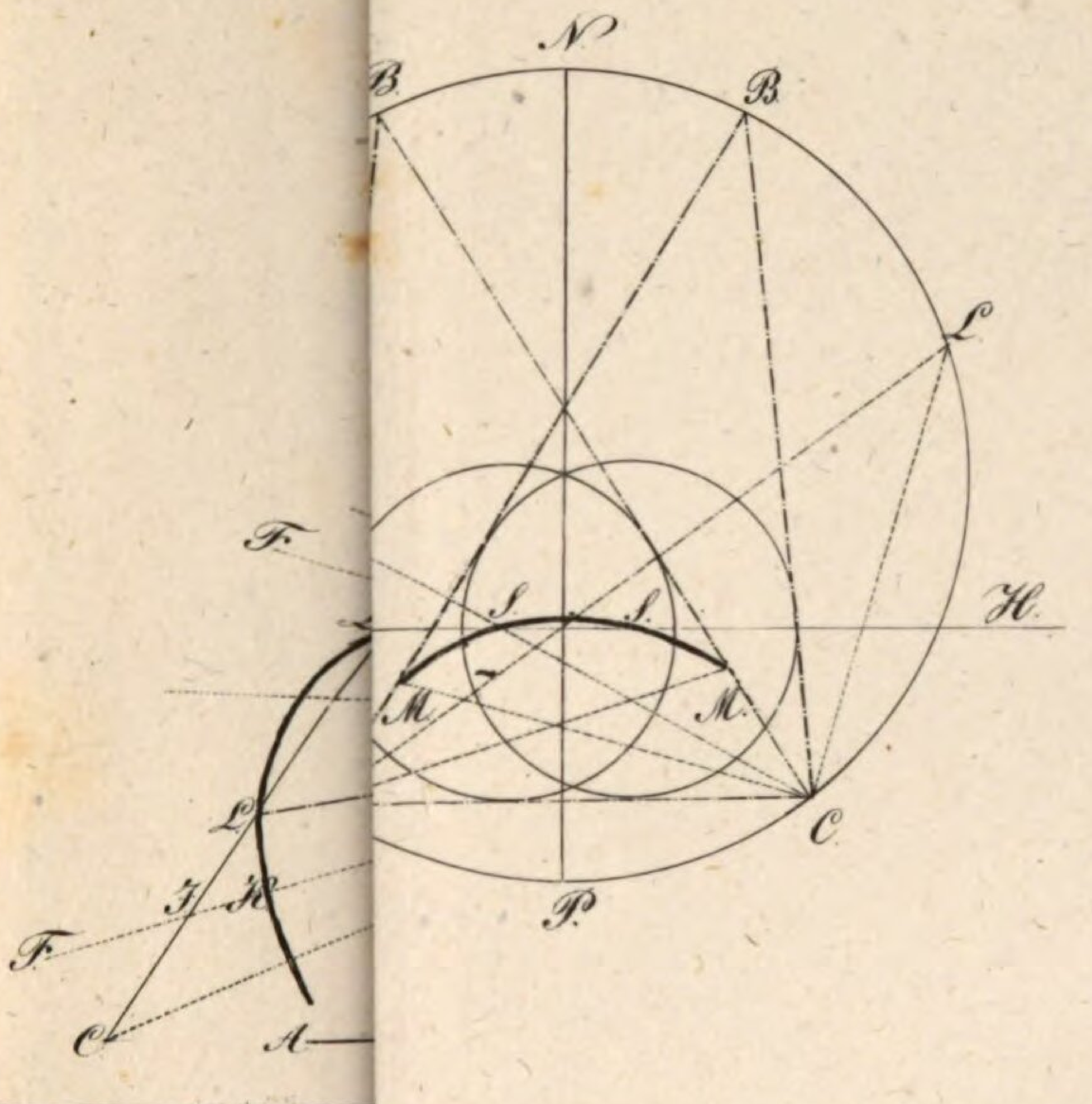
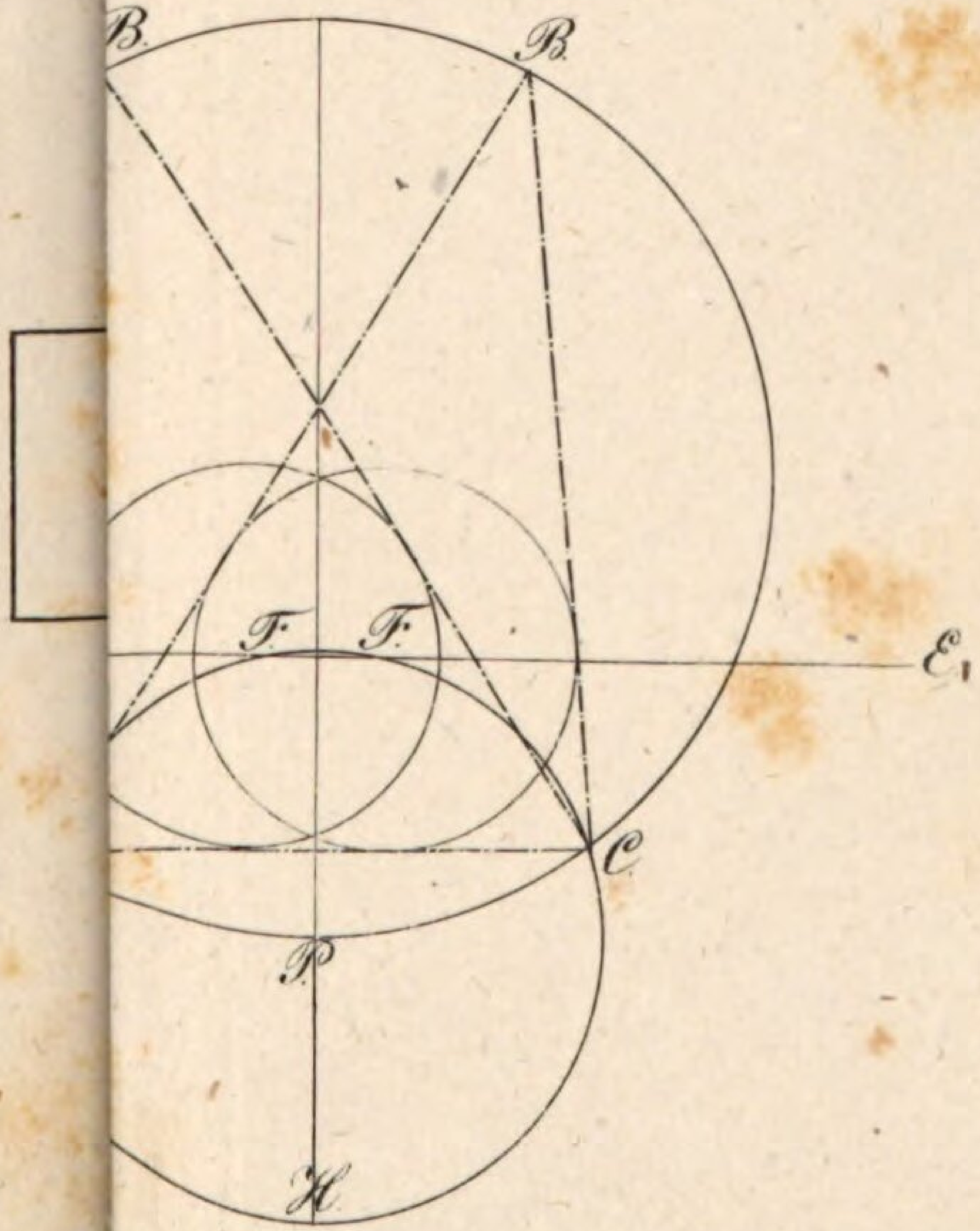


Fig: 4.



Taf: VII.

Fig: 1.

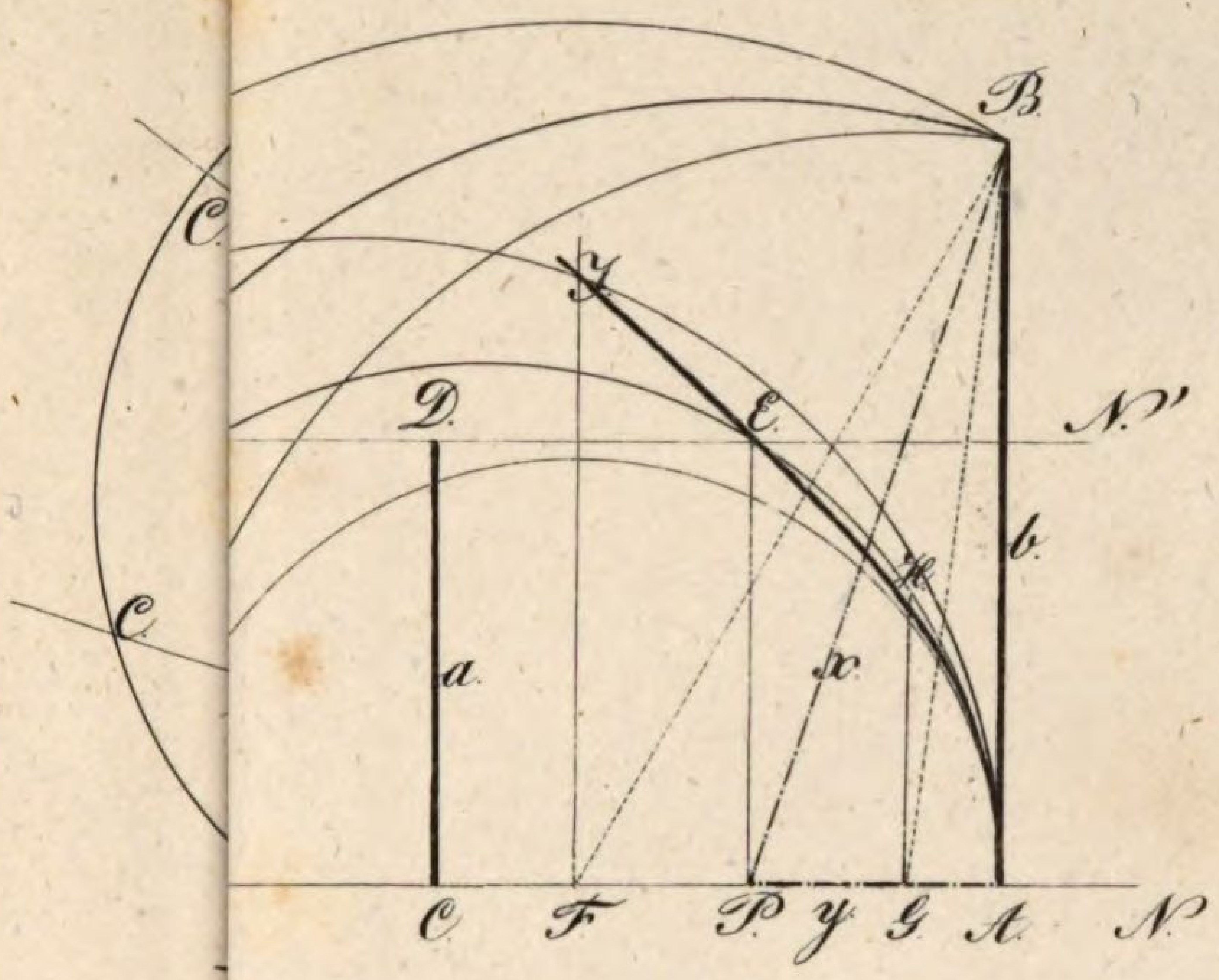


Fig: 3.

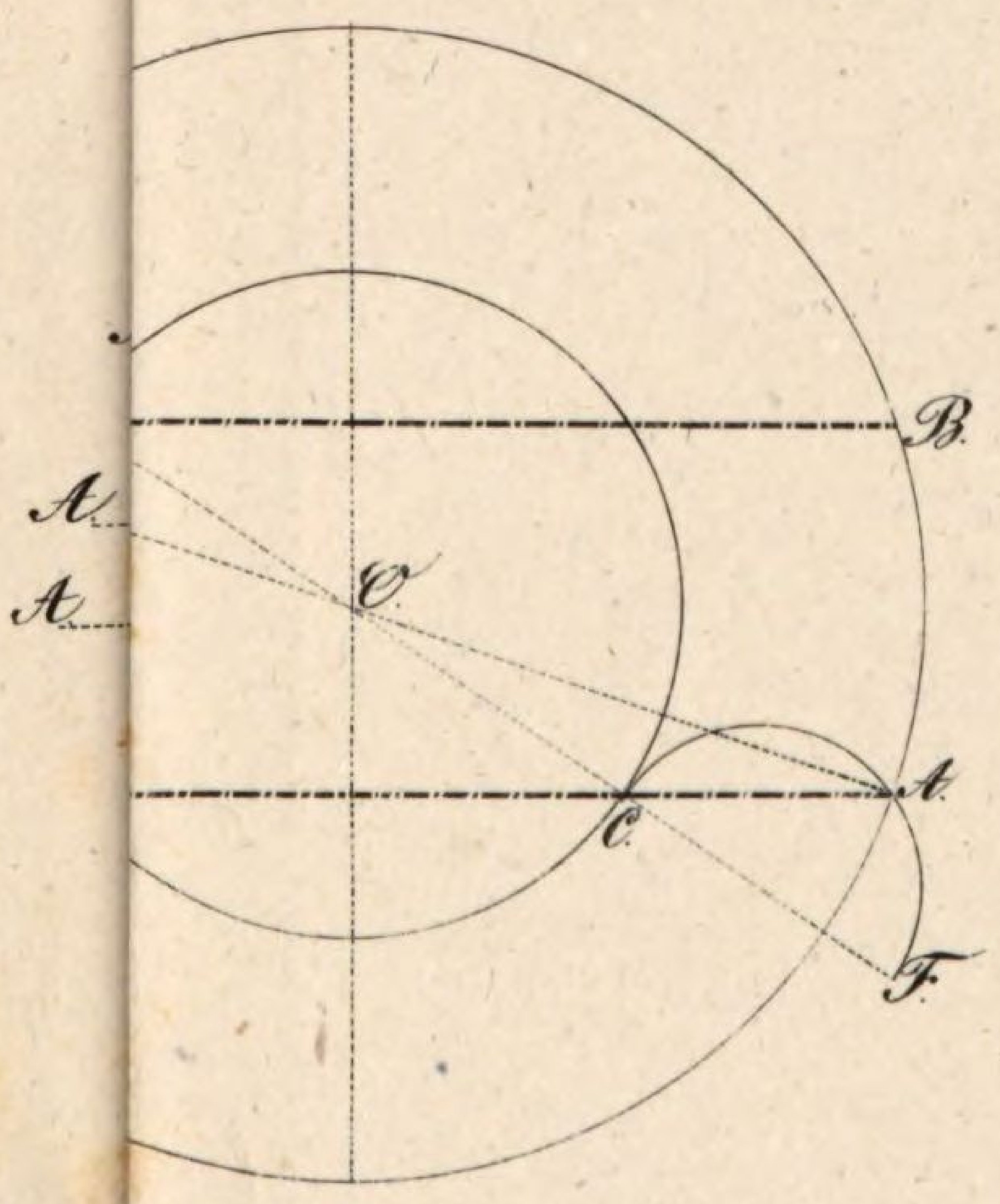


Fig: 1.

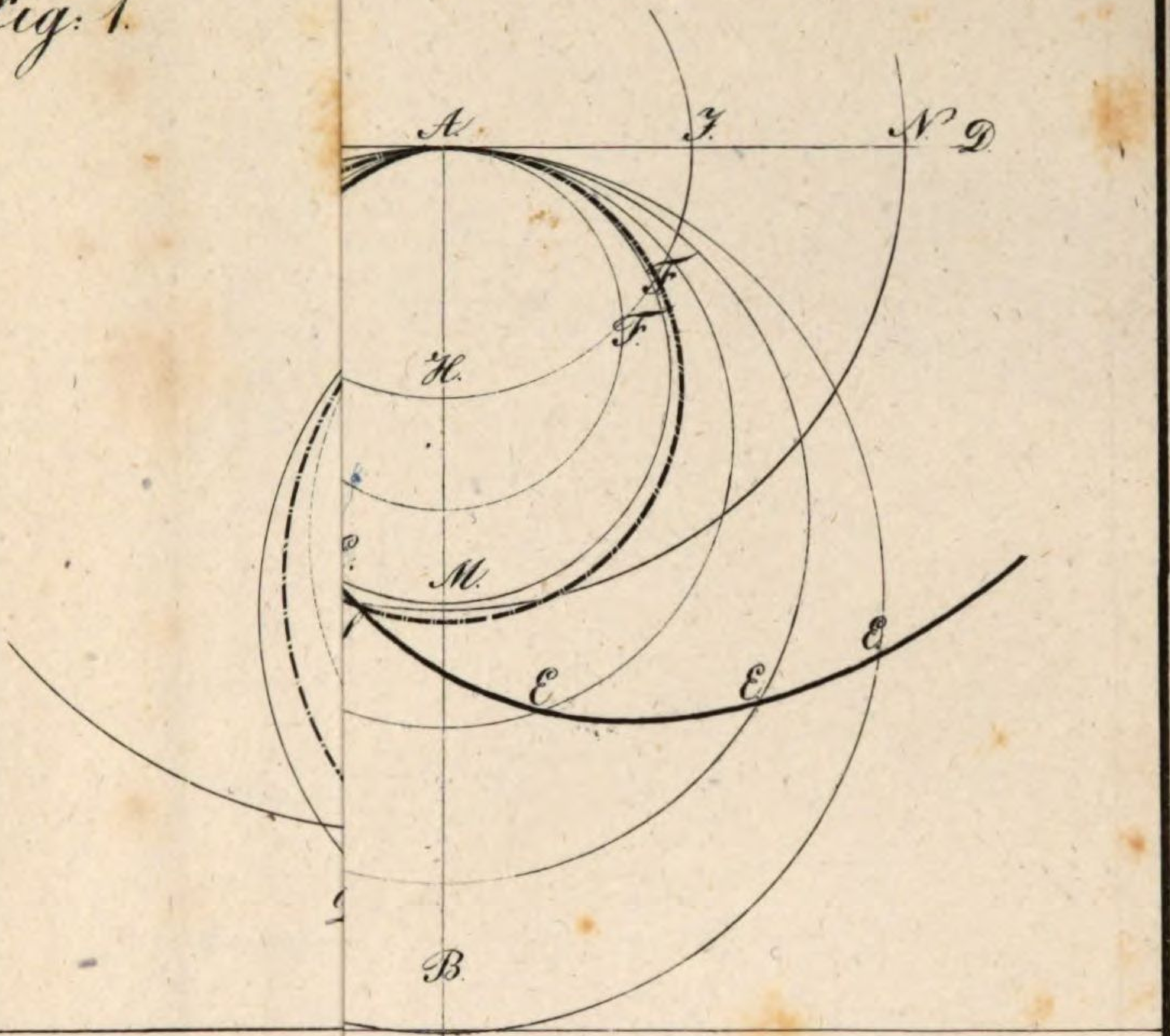
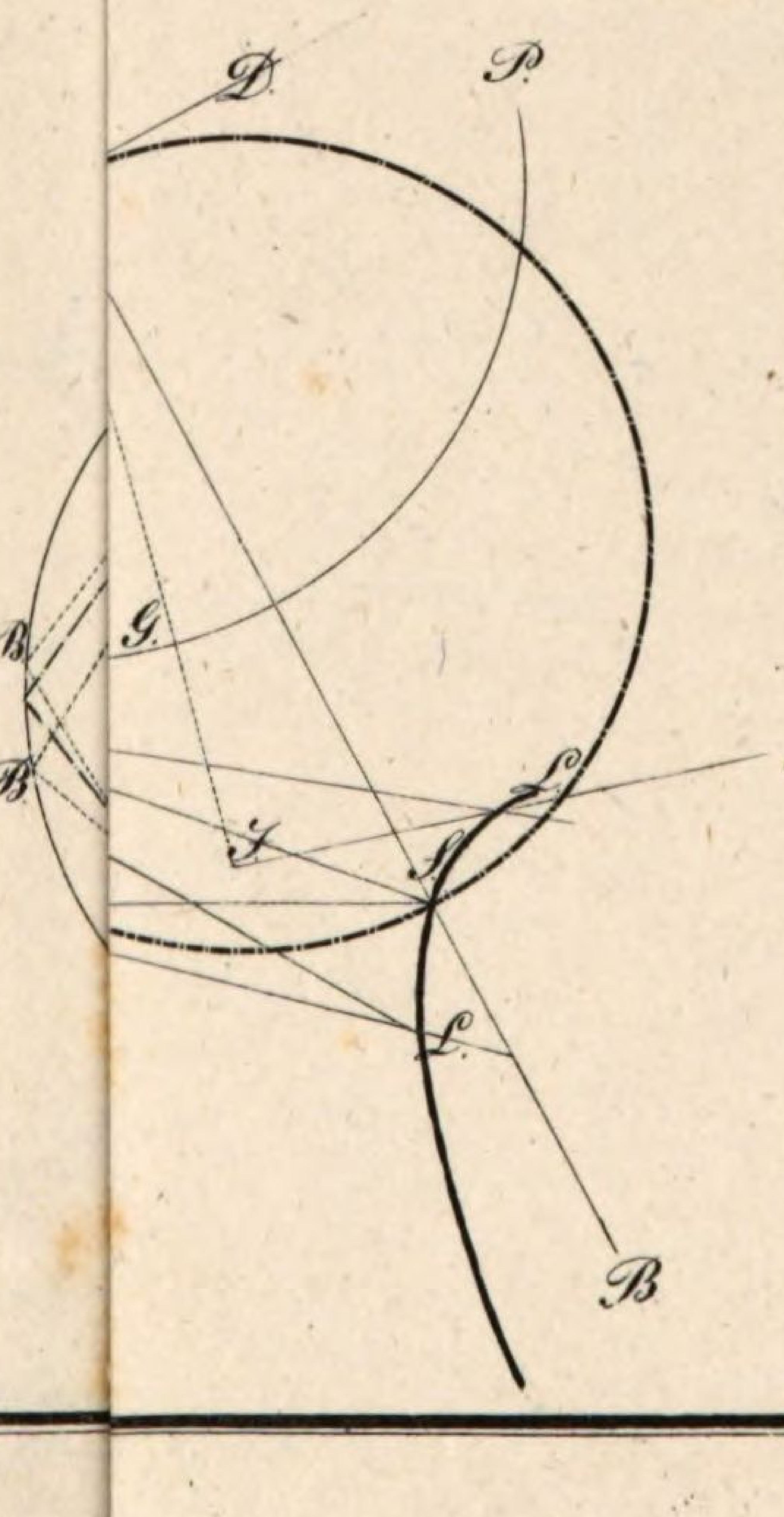


Fig: 4.



Fig

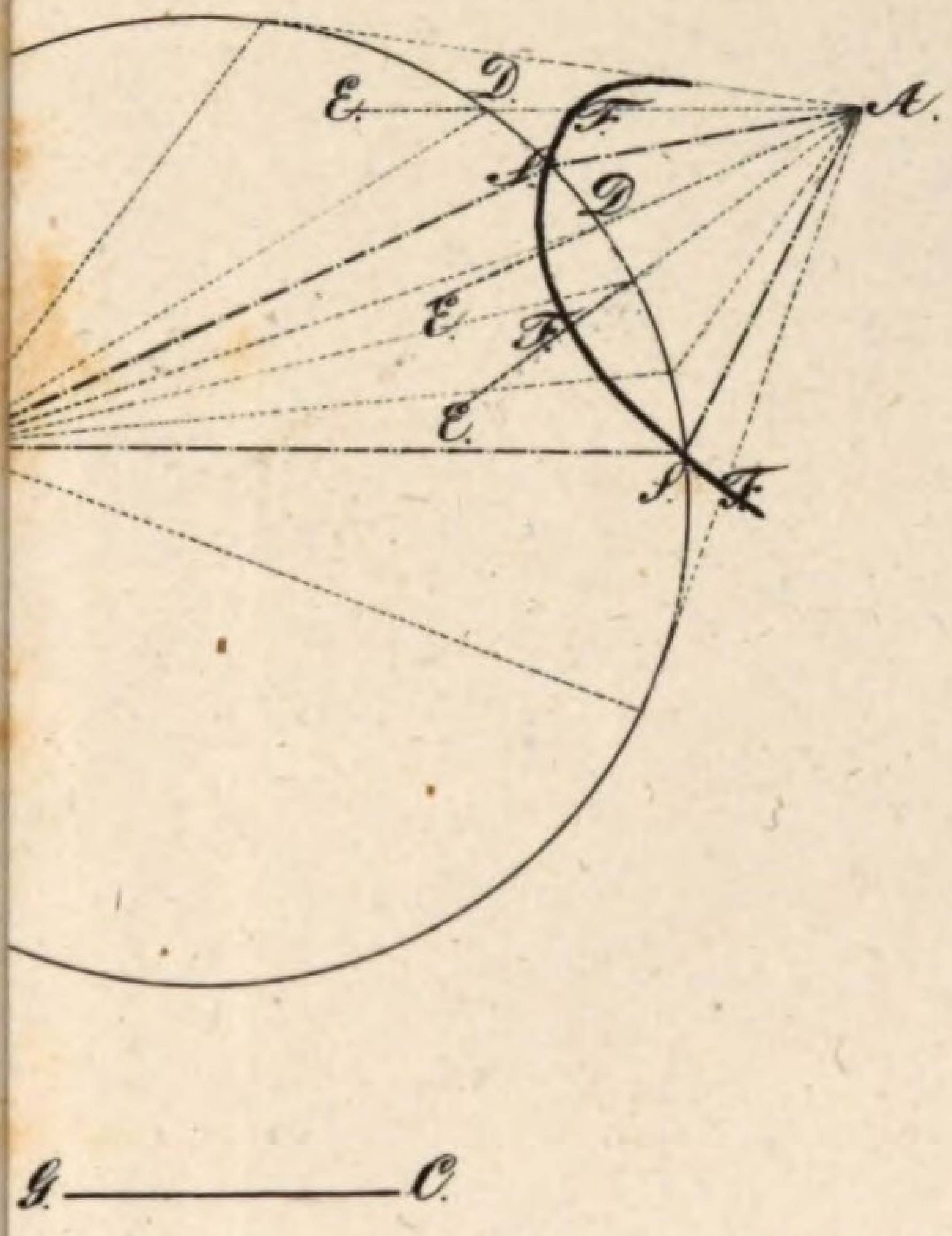


Fig:

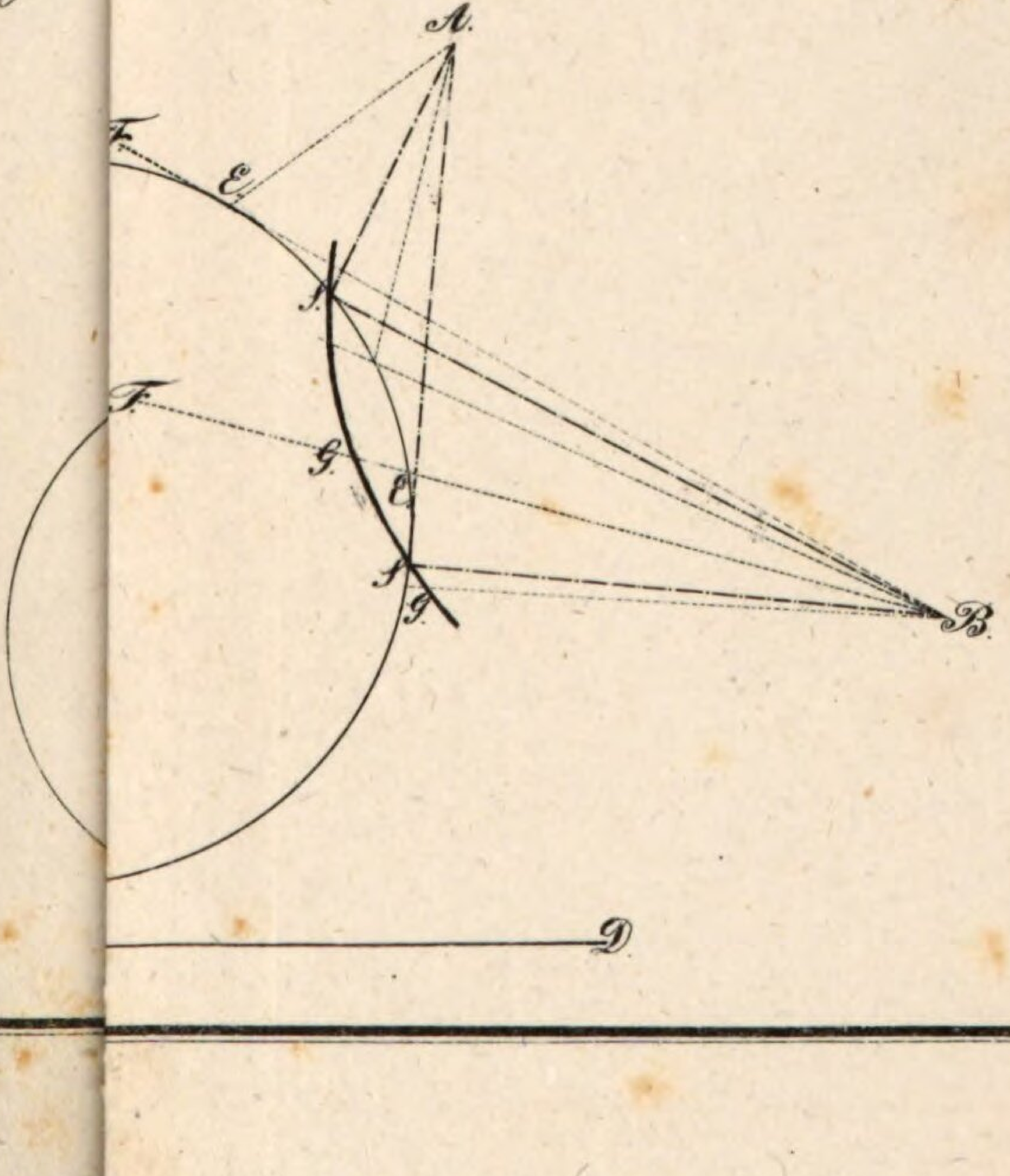


Fig: 1.

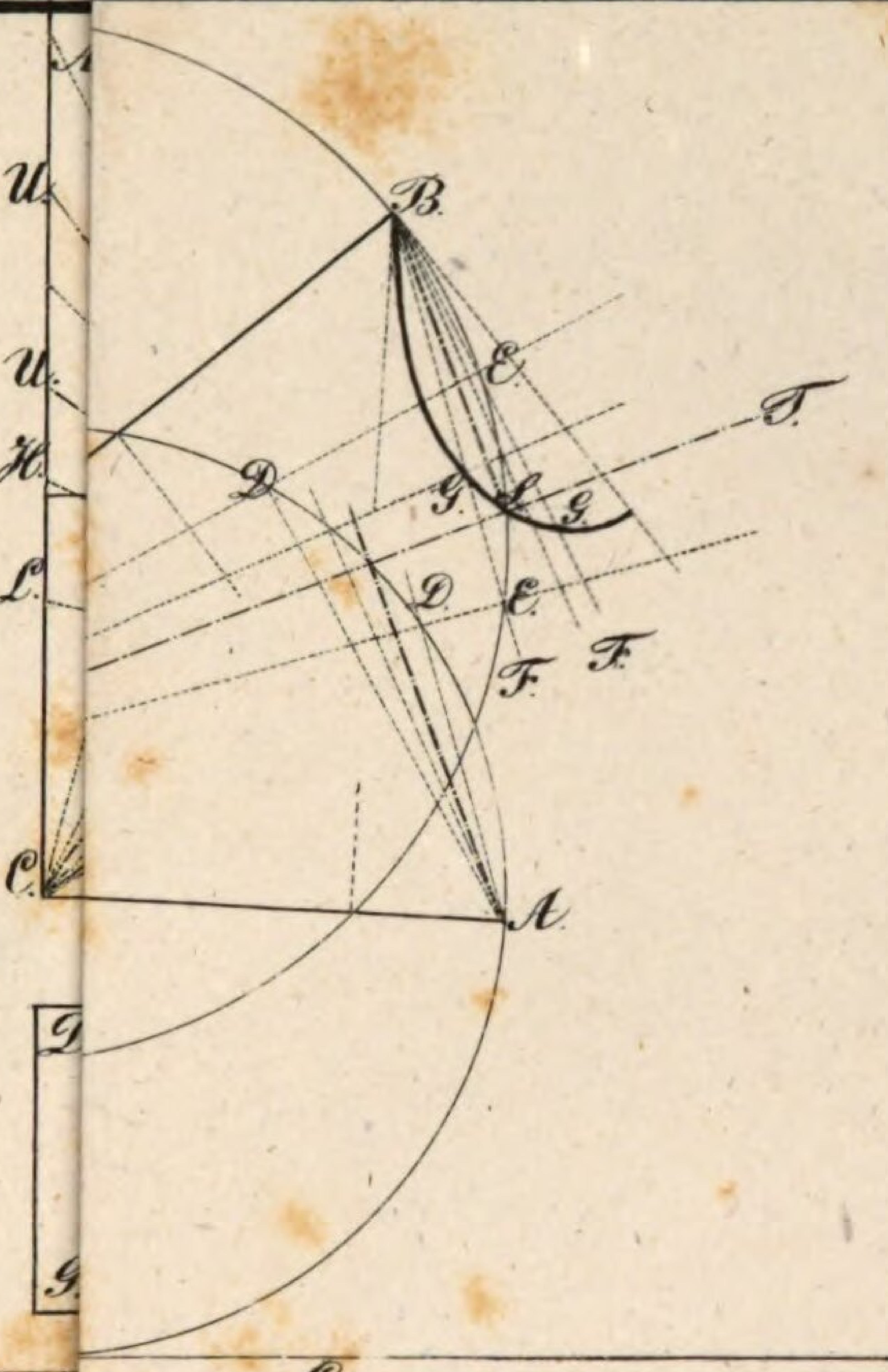


Fig: 4.

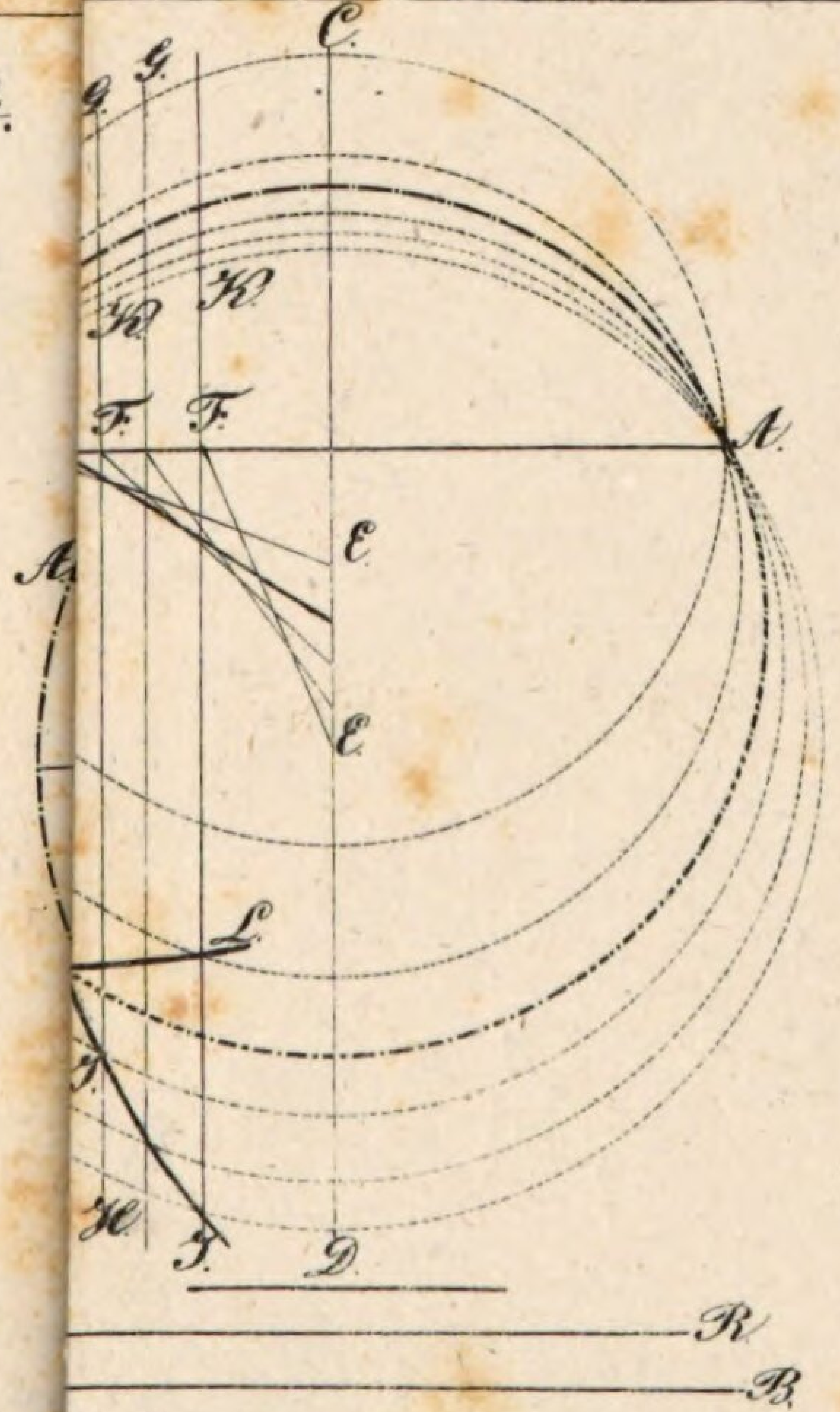


Fig 1.

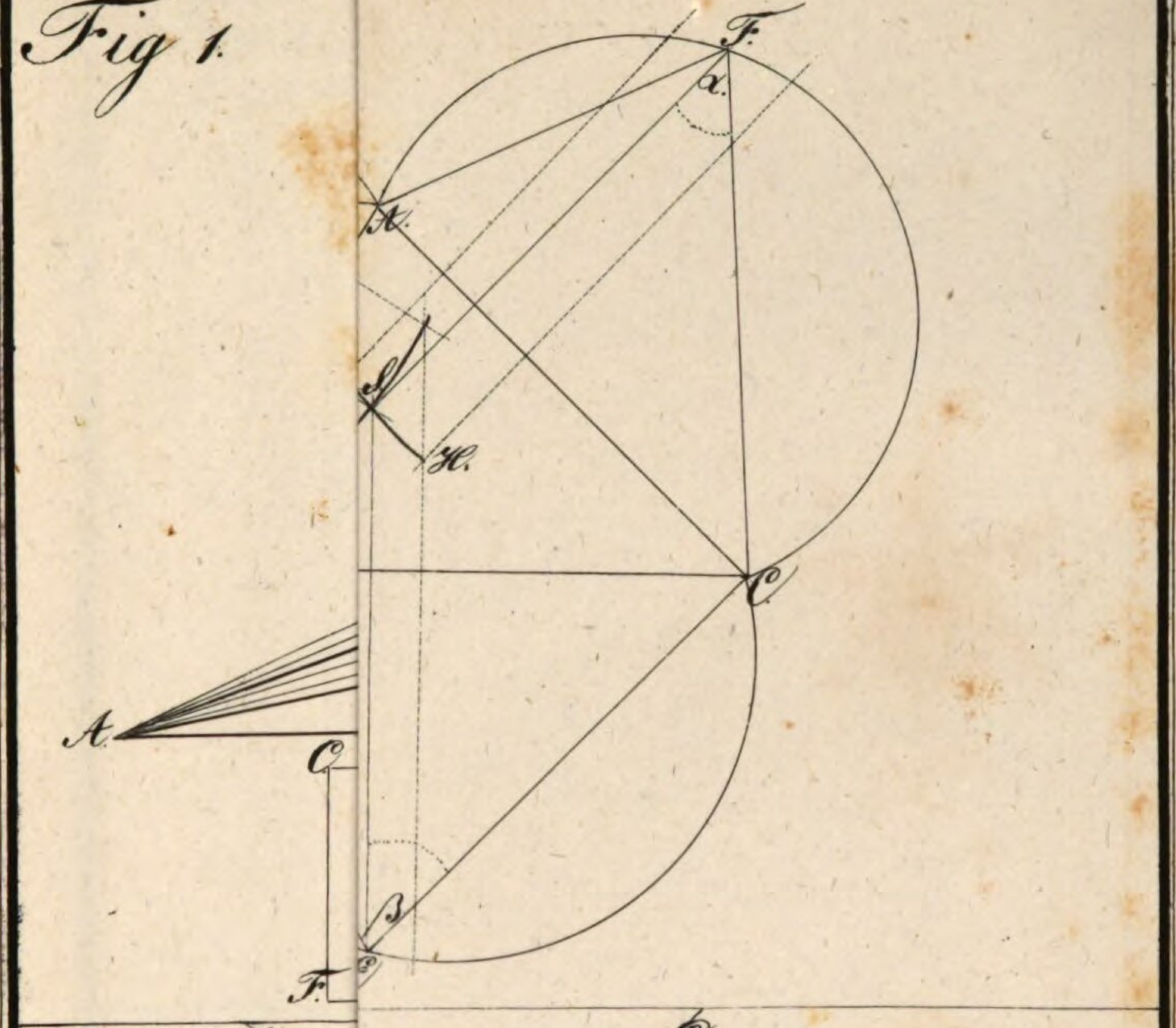
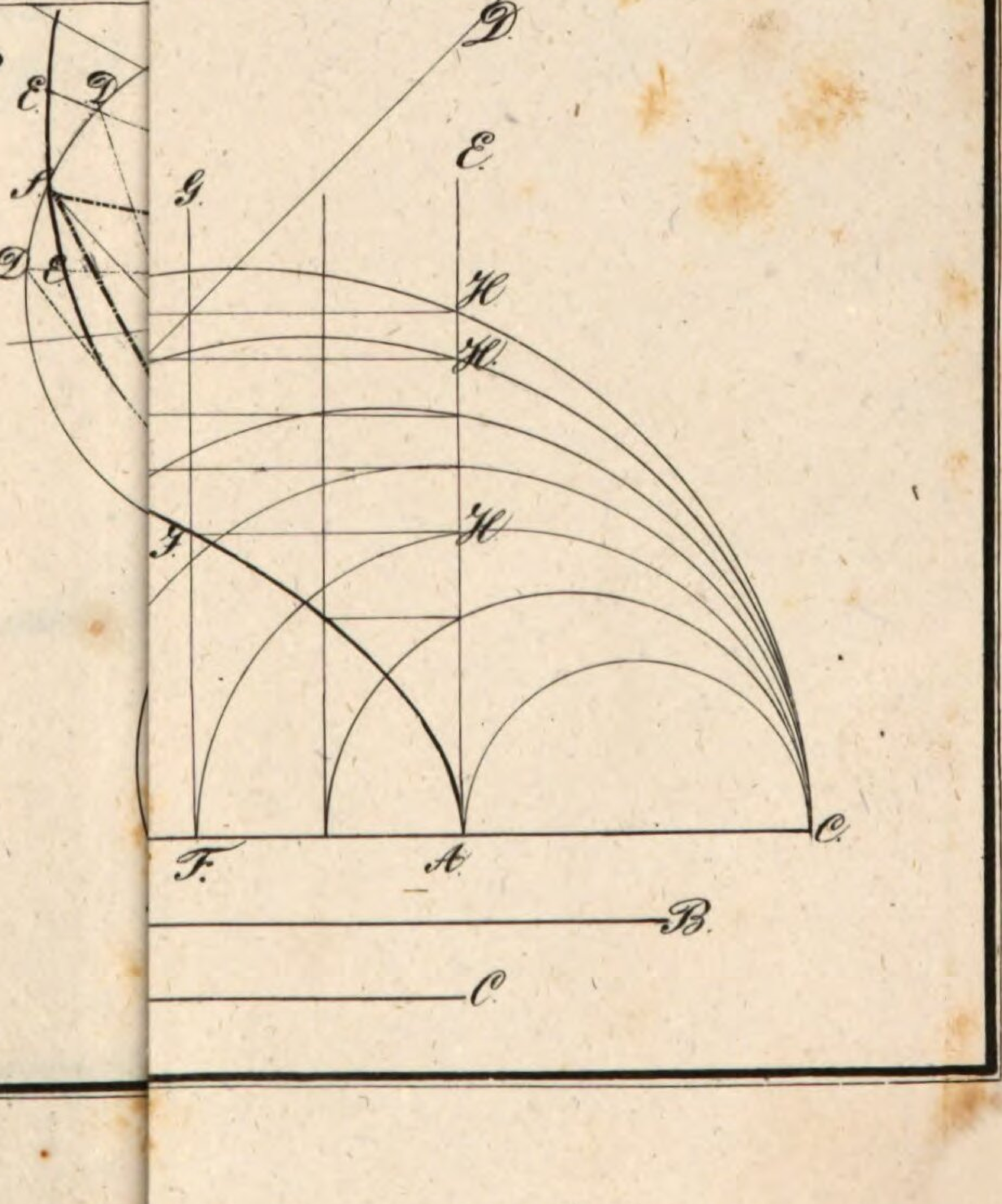


Fig. 3.



Taf: XII.

Fig: 1.

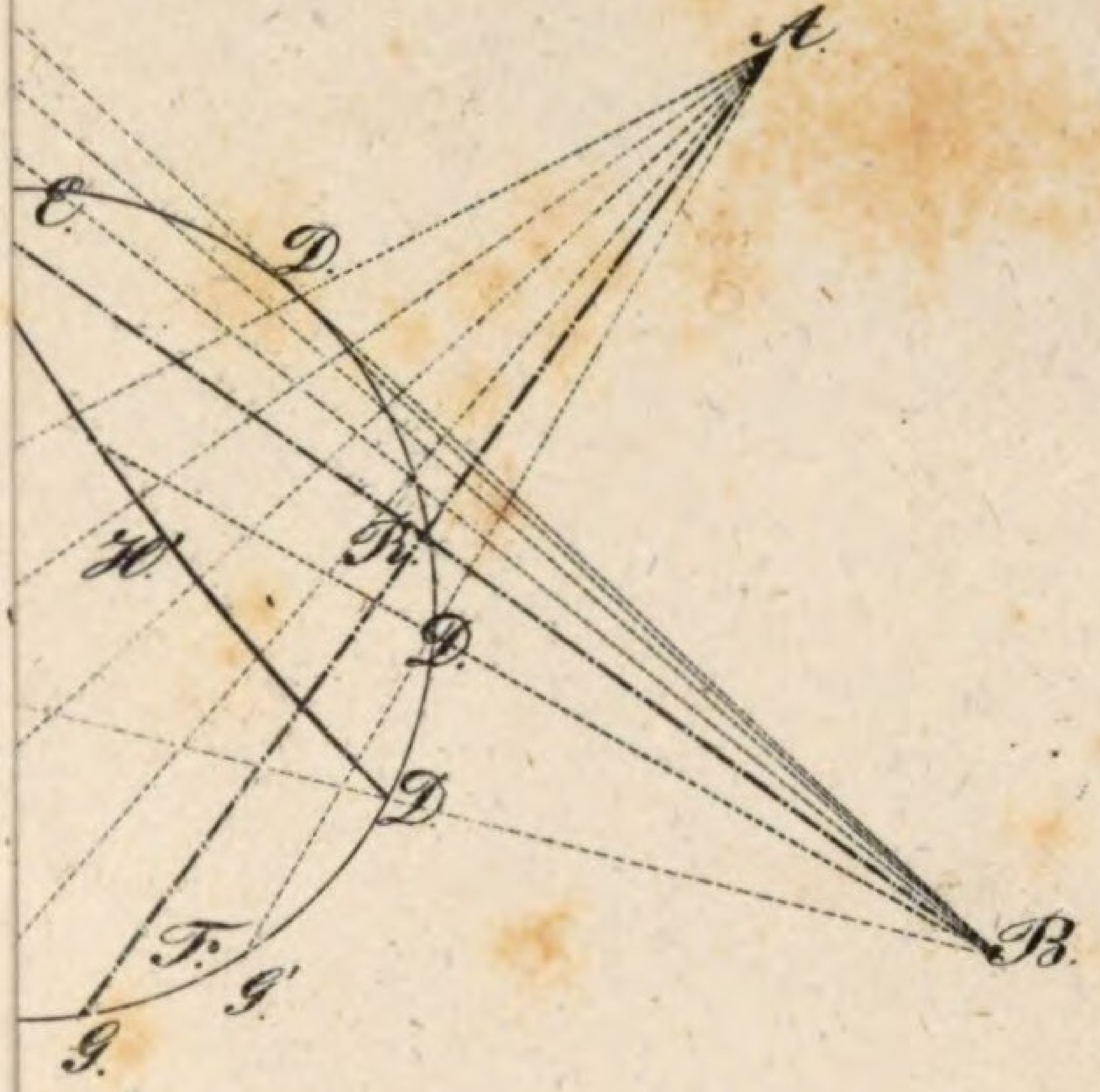


Fig: 3.

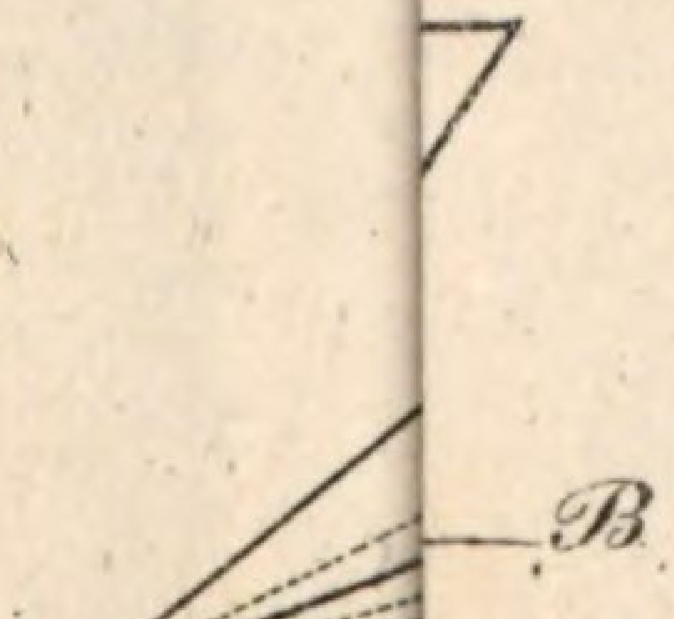
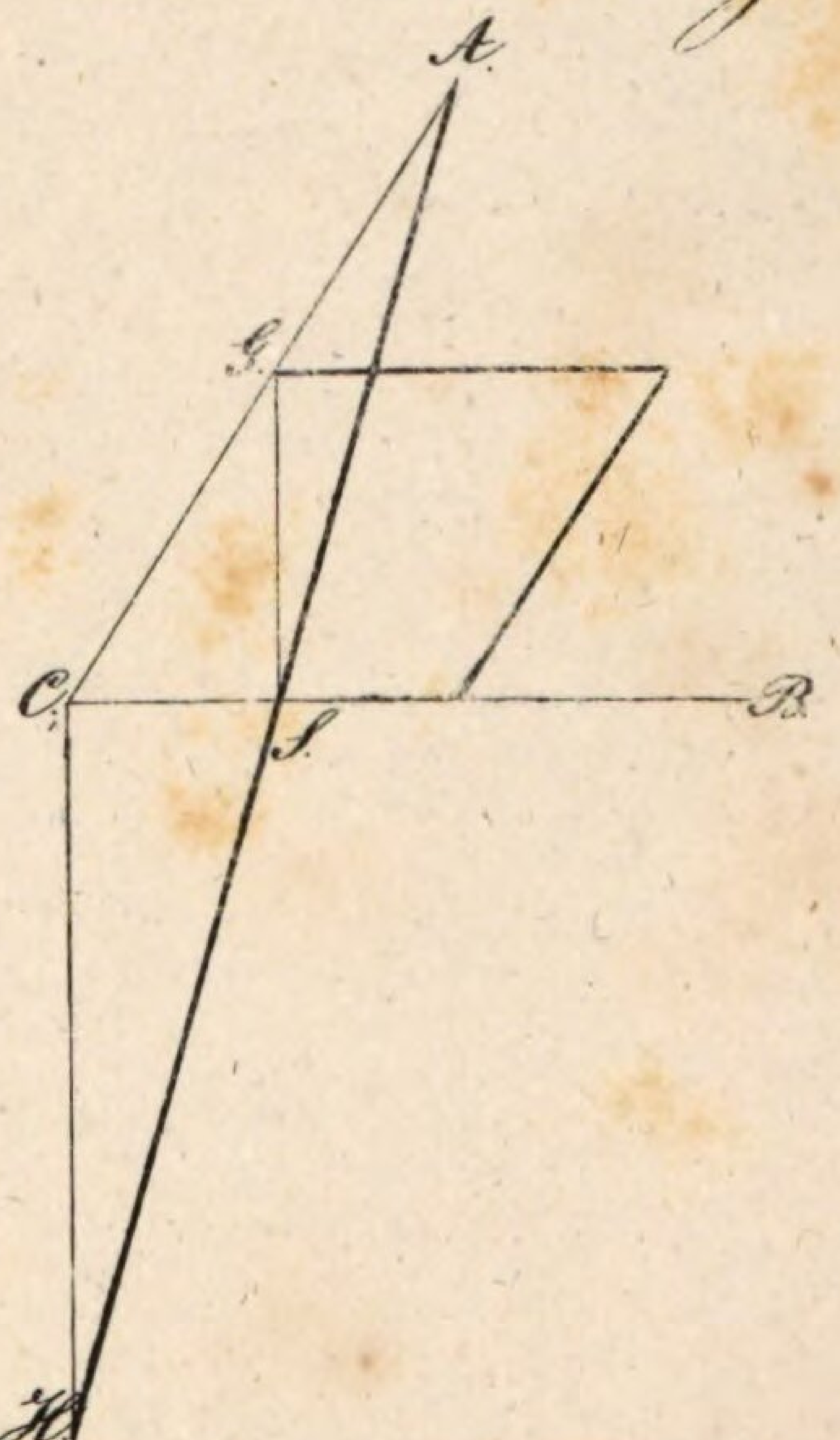


Fig: 5.



G
nkel und, co
der Dreiech
a.
Cat
c.
b
a.
sisheim

D. K

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ladomus, Johann Friedrich,

Geometrische Constructionslehre für Lehrer und Lernende ; [in 17 K.]

Bd.: 3

Freyburg 1832

Math.p. 270 m-3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082216-6